Il valore aggiunto dell'inferenza bayesiana nell'analisi dei dati in psicologia

Un'applicazione esemplificativa

Antonio Calcagnì* & Gianmarco Altoè†

* Dip. di Psicologia e Scienze Cognitive, Università di Trento
† Dip. di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione, Università di Padova

Congresso AIP Sezione Sperimentale
Bari, 20 settembre 2017

Un'applicazione esemplificativa

Consideriamo i punteggi ad un test di successo terapeutico ottenuti da due gruppi di pazienti sottoposti a due trattamenti differenti:

- quanto i due gruppi differiscono in termini di successo terapeutico?
- i due gruppi sono omogenei rispetto al successo terapeutico?
- come quantificare la magnitudo di queste differenze?

Dati e statistiche del problema:

- Realizzazioni campionarie:

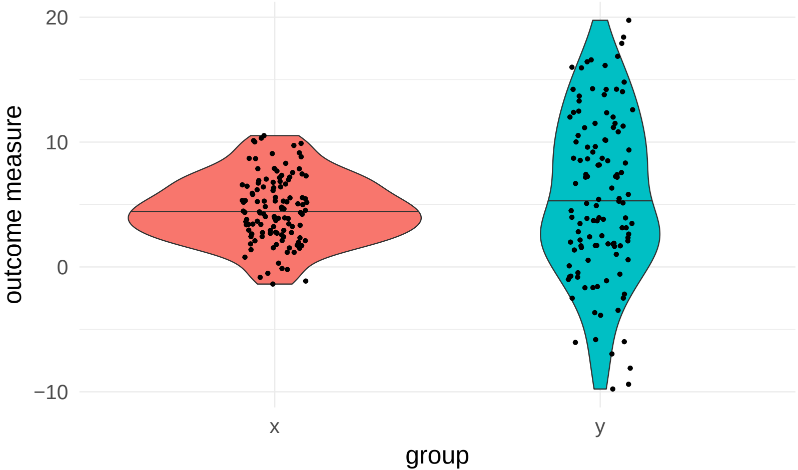
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{N1}) \quad \text{primo gruppo}$$
$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{N2}) \quad \text{secondo gruppo}$$

- Statistiche campionarie:

$$\{\overline{x}, s_x^2\} \quad \text{e} \quad \{\overline{y}, s_y^2\}$$

- Quantità di interesse:

$$\delta_\mu = (\mu_x - \mu_y) \quad \text{e} \quad \delta_\sigma = (\sigma_x - \sigma_y)$$
$$\tau = (\overline{x} - \overline{y})/s_p \quad \text{con } s_p \text{ varianza pooled tra due gruppi}$$



$N1 = 120$ $\quad$ $N2 = 120$

$\overline{x} = 4.61$ $\quad$ $\overline{y} = 5.61$

$\sigma_x = 2.65$ $\quad$ $\sigma_y = 6.51$

Parametri da stimare: $\boldsymbol{\theta} = \{\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2\}$
Quantità di interesse: δ_μ, δ_σ, τ

Rappresentazione bayesiana del problema:

$$
\begin{aligned}
\mu_x &\sim \mathcal{N}(0, 100) \quad \text{prior media primo gruppo} \\
\mu_y &\sim \mathcal{N}(0, 100) \quad \text{prior media secondo gruppo} \\
\sigma_x^2 &\sim \chi^2(6) \quad \text{prior varianza primo gruppo} \\
\sigma_y^2 &\sim \chi^2(6) \quad \text{prior varianza secondo gruppo} \\
\mathbf{x} &\sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2) \\
\mathbf{y} &\sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)
\end{aligned}
$$

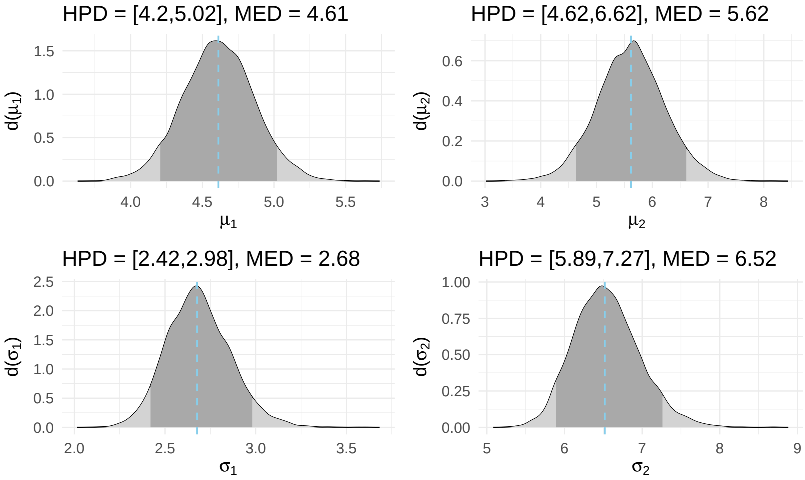
Parametri da stimare: $\boldsymbol{\theta} = \{\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2\}$
Quantità di interesse: δ_μ, δ_σ, τ

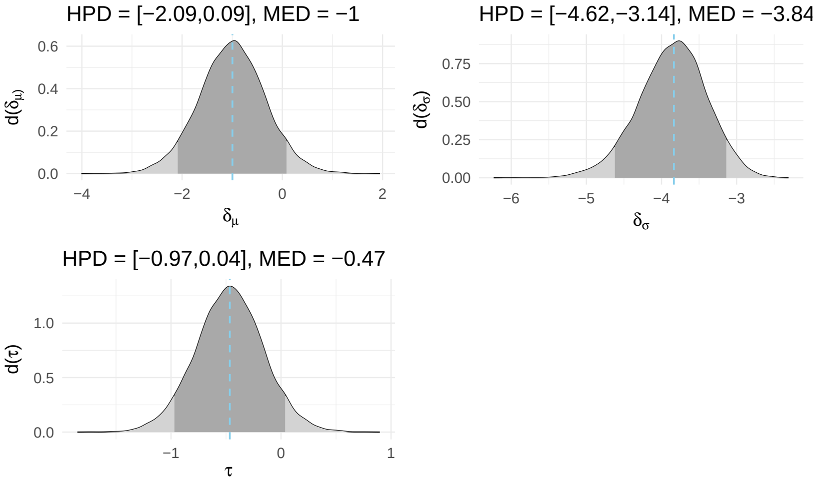
Rappresentazione bayesiana del problema:

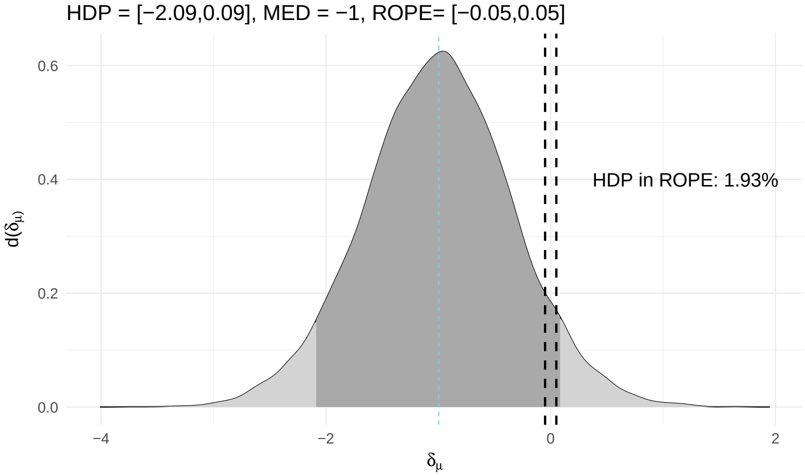
$$\mu_x \sim \mathcal{N}(0, 100) \quad \text{prior media primo gruppo}$$
$$\mu_y \sim \mathcal{N}(0, 100) \quad \text{prior media secondo gruppo}$$
$$\sigma_x^2 \sim \chi^2(6) \quad \text{prior varianza primo gruppo}$$
$$\sigma_y^2 \sim \chi^2(6) \quad \text{prior varianza secondo gruppo}$$

Nota:

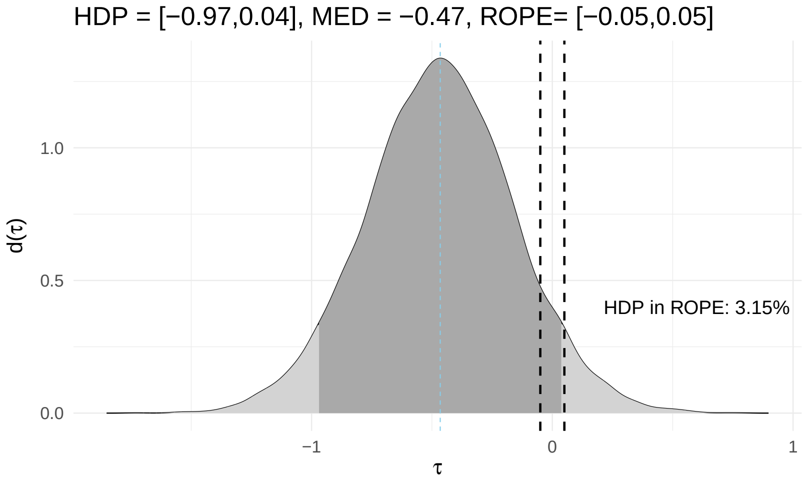
L'inferenza bayesiana non produce valori puntuali per i parametri $\boldsymbol{\theta}$ e le quantità di interesse $\{\delta_\mu,\ \delta_\sigma,\ d\}$. Al contrario, alla fine del processo otterremo delle intere distribuzioni (a posteriori) sui singoli parametri e quantità che ci permetterranno di arricchire e migliorare l'informazione inferenziale.


HPD = [4.2,5.02], MED = 4.61
d(μ1)
μ1
HPD = [4.62,6.62], MED = 5.62
d(μ2)
μ2
HPD = [2.42,2.98], MED = 2.68
d(σ1)
σ1
HPD = [5.89,7.27], MED = 6.52
d(σ2)
σ2


HPD = [−2.09,0.09], MED = −1
d(δμ)
δμ
HPD = [−4.62,−3.14], MED = −3.84
d(δσ)
δσ
HPD = [−0.97,0.04], MED = −0.47
d(τ)
τ



Un valore nullo per δ_μ è **poco credibile**: solo 1.93% della posterior distribution è all'interno della regione di nullità (ROPE).



Un valore nullo per τ è **poco credibile**: solo 3.15% della posterior distribution è all'interno della regione di nullità (ROPE).

Conclusioni:

- L'evidenza empirica supporta l'ipotesi che i due gruppi siano differenti in media (98% di credibilità)
- I due gruppi non sono omogenei rispetto al successo terapeutico: il gruppo **y** ha maggiore variabilità del gruppo **x** nei punteggi finali
- L'evidenza empirica sottolinea un effetto medio $\tau = -0.47$ (96% di credibilità)

antonio.calcagni@unitn.it
gianmarco.altoe@unipd.it

LaTeX

useR!

knitr
Elegant, flexible
and fast dynamic
report generation with R

Stan