

Università degli studi di Padova

Dipartimento di Psicologia Generale
Corso di laurea in Psicologia cognitiva applicata

**La rilevazione delle onde gravitazionali e la
quantificazione mediante variabili latenti: similarità
tra i due approcci per misurare segnale e rumore**

Candidato:
Nicola Ricciardi

Relatore:
Prof. Antonio Calcagni
Correlatore:
Prof. Roberto Caione

Anno Accademico 2021-2022

*Alle mie
Sorelle*

Sommario

Questo lavoro si propone di analizzare il modello usato per rilevare le onde gravitazionali primordiali di fondo e trarne dei risvolti applicativi nel contesto della statistica psicometrica, individuando differenze e similitudini rispetto all'analisi fattoriale confermativa.

In cosmologia, si ipotizza che le onde gravitazionali risalgano ai momenti immediatamente successivi al Big Bang. Queste prime *incresature* gravitazionali primordiali formatesi nello spazio-tempo sono state immediatamente amplificate dai processi inflazionistici che hanno indotto l'universo ad espandersi in modo esponenziale. Le cosiddette onde gravitazionali primordiali, generate quasi 13.8 miliardi di anni fa, sono tuttavia mascherate da eventi gravitazionali che hanno avuto origine in tempi più recenti come la fusione di buchi neri oppure di stelle di neutroni.

È ben noto come la presenza di corpi massivi deformi la geometria dello spazio-tempo che analogamente ad un tappeto elastico, si curvi in presenza di materia. In una situazione dinamica come quella che potrebbe verificarsi durante la fusione di un sistema binario, la curvatura si modifica nel tempo. Tale variazione non avviene istantaneamente in tutti i punti: essa si propaga sotto forma di perturbazioni che avanzano alla velocità della luce. In sostanza le onde gravitazionali comunicano allo spazio-tempo il modo in cui la sua curvatura deve cambiare.

Gli interferometri Ligo e Virgo sono in grado di rilevare quasi quotidianamente gli eventi gravitazionali ma i segnali primordiali risultano molto più deboli rispetto a quelli che sono attualmente in grado di misurare; i segnali primordiali sono nascosti infatti da altri segnali relativi a sorgenti di diversa natura astrofisica. Lo sfondo primordiale è difatti oscurato da un segnale astrofisico in primo piano, ad esempio quello proveniente dalla fusione di buchi neri e stelle di neutroni o da esplosioni di supernove.

In passato si è cercato di separare il segnale astrofisico in primo piano da quello di fondo attraverso metodi sottrattivi, misurando i parametri di ogni sistema binario rilevato con lo scopo di sottrarre dai dati la forma d'onda gravitazionale (Cutler & Harms, 2006). Per rilevare il segnale di fondo è necessario tuttavia che gli strumenti abbiano una sensibilità tale da poter identificare e sottrarre ogni sistema binario presente nell'universo. Poiché è praticamente impossibile eliminare ogni forma d'onda proveniente da tali eventi tale la misurazione viene contaminata da un errore sistematico. Si prevede che nel prossimo decennio ci saranno strumenti più sensibili (*The Big Bang Observer* BBO) per rilevare queste prime incresature.

Il modello statistico utilizzato per la separazione del segnale gravitazionale primordiale di fondo dal primo piano astrofisico è di interesse nel contesto dell'analisi fattoriale confermativa per una certa similitudine con la misurazione del segnale latente.

L'analisi fattoriale confermativa (CFA) è un modello statistico appartenente alle equazioni strutturali (SEM) e tratta le relazioni che si creano tra misure osservate o indicatori (per esempio test items, punteggi a test, scale di osservazione comportamentale) e variabili latenti (fattori). Una variabile osservata è un indicatore che viene usato per misurare una quantità latente (misurando).

Le variabili latenti possono influenzare gli indicatori osservati, ad esempio, la variabile latente *ansia* potrebbe avere un certo legame con i livelli di stress riportati da una persona. Nonostante

un singolo item legato allo stress non possa direttamente misurare i livelli di ansia, può comunque dare importanti indizi rispetto alla relazione tra ansia e stress.

La CFA richiede al ricercatore di preimpostare tutti gli aspetti del modello. In particolare, basandosi sull'analisi di lavori precedenti egli deve dichiarare in che modo gli indicatori osservati siano legati alle rispettive variabili latenti. Gli usi della CFA sono numerosi, un esempio notevole è quello in cui viene usata durante il processo di sviluppo di scale per valutare la struttura latente di un test o un questionario con l'obiettivo di verificare il numero di dimensioni latenti di uno strumento (fattori) e la relazione item-fattore (*factor loadings*). Quando la struttura latente è multifattoriale ossia composta da due o più fattori, il pattern di *factor loadings* supportato dalla CFA indicherà fino a che punto un test può essere valutato usando le sottoscale. In questo senso, il numero di fattori risulta indicativo per il numero di sottoscale e il pattern di relazione item-fattore indica come le sottoscale devono essere valutate. (Brown, 2015).

Questo elaborato si propone di descrivere i metodi utilizzati per la rilevazione delle onde gravitazionali primordiali di fondo (Capitolo 1). In seguito saranno descritte le principali proprietà della *Confirmatory Factor Analysis* (CFA) e la definizione del modello statistico che viene ricavato partendo da quello utilizzato per *catturare* le onde gravitazionali di fondo (Capitolo 2). Infine, dopo aver descritto le principali caratteristiche del modello che è stato ricavato per la misurazione del segnale e del rumore, quest'ultimo verrà applicato ad un caso studio per osservare se effettivamente è in grado di rilevare e distinguere i costrutti latenti che si vogliono misurare nell'*Experiences in Close Relationships* (ECR), un test utilizzato per valutare l'attaccamento nella media infanzia (Capitolo 3).

Indice

Sommario	v
1 Introduzione alla misura dei segnali latenti in astronomia	1
1.1 UNIVERSO IN EVOLUZIONE	1
1.2 LA RADIAZIONE COSMICA DI FONDO	1
1.3 ESPANSIONE DELL'UNIVERSO	4
1.3.1 Le equazioni di Friedmann	5
1.3.2 Redshift	5
1.3.3 La legge di Hubble	7
1.4 RILEVAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI PRIMORDIALI OSCURATE	8
1.4.1 Metodo Bayesiano per rilevare onde gravitazionali oscurate	8
2 Misurare segnali latenti in psicomatria	11
2.1 CFA: BREVE INTRODUZIONE	11
2.1.1 CFA: modello	11
2.2 CFA TIPO MISTURA PER POPOLAZIONI ETEROGENEE	13
2.2.1 Metodi di analisi per popolazioni eterogenee	13
2.3 DALLA MISURAZIONE DEL SEGNALE GRAVITAZIONALE ALLA MISURAZIONE DEL SEGNALE PSICOMETRICO	14
2.4 ALGORITMO HAMILTONIANO MEDIANTE "STAN"	15
2.4.1 Generazione di transizioni	15
2.4.2 Integratore Leapfrog	16
2.4.3 <i>Metropolis accept step</i>	16
2.4.4 Nuts	17
3 CASO STUDIO	19
3.1 TEORIA DELL'ATTACCAMENTO NELLA MEDIA INFANZIA E PRIMA ADOLESCENZA	19
3.2 MISURAZIONE DELL'ATTACCAMENTO NELLA MEDIA INFANZIA E PRIMA ADOLESCENZA	20
3.2.1 <i>Experiences in Close Relationships</i> (ECR)	20
3.2.2 Limiti ECR-RC	21
3.3 MATERIALI E METODI	21
3.3.1 Partecipanti	21
3.4 ANALISI	22
3.4.1 Risultati	24
A	33
Bibliography	35

Elenco delle figure

1.1	La storia dell'Universo dal Big Bang (circa 13.82 miliardi di anni fa) ad oggi. Le principali fasi dell'evoluzione, da quelle che hanno portato alla nascita della materia a quelle che hanno consentito l'aggregazione di strutture cosmiche sempre più complesse. Riferimento: https://it.wikipedia.org/	2
1.2	Mappa delle anisotropie del fondo cosmico a microonde viste dal satellite Planck https://www.media.inaf.it	3
1.3	Lo spettro di corpo nero della radiazione cosmica di fondo osservato da COBE http://astrocultura.uai.it	4
1.4	Tre tipi di curvatura dell'universo espressi in funzione del valore di Ω	6
1.5	In questa figura è possibile osservare la <i>look back time function</i> . Questa funzione permette di associare ad un certo redshift la corrispondente epoca in termini di anni; si noti come la curva è intrinsecamente legata al modello cosmologico adottato per descrivere l'universo https://astronomy.stackexchange.com	6
2.1	Esempio di CFA con due fattori latenti, ossessione e compulsione	12
3.1	<i>trace plots</i> del parametro ξ	27
3.2	<i>trace plots</i> del parametro Λ per il primo fattore	27
3.3	<i>trace plots</i> del parametro Λ per il secondo fattore	28
3.4	<i>trace plots</i> della diagonale della matrice delle varianze/covarianze degli errori del modello segnale e rumore per il primo fattore	28
3.5	<i>trace plots</i> della diagonale della matrice delle varianze/covarianze degli errori del modello segnale e rumore per il secondo fattore	29
3.6	<i>trace plots</i> del parametro Φ	29
3.7	Medie ed intervalli di incertezza per ξ	30
3.8	Medie ed intervalli di incertezza per la matrice dei coefficienti fattoriali	30
3.9	Medie ed intervalli di incertezza per la matrice delle varianze/covarianze tra fattori latenti	31
3.10	Medie ed intervalli di incertezza per la matrice delle varianze/covarianze degli errori del modello	31

Capitolo 1

Introduzione alla misura dei segnali latenti in astronomia

1.1 UNIVERSO IN EVOLUZIONE

Nei primi istanti dopo il Big Bang l'universo era costituito da un *brodo* caldo, denso e uniforme di particelle (Ross, 2008). Le prime informazioni accessibili risalgono a 10^5 anni dopo, ovvero al periodo in cui inizia il disaccoppiamento tra materia e radiazione. La Radiazione Cosmica di Fondo, di cui parleremo nel prossimo paragrafo, si forma proprio in quest'epoca.

Due minuti dopo l'origine dell'universo inizia la *nucleosintesi*, un processo durante il quale i neutroni decadono in protoni, consentendo la formazione dei primi nuclei. In seguito al disaccoppiamento della forza gravitazionale si suppone abbia avuto inizio l'inflazione, alla fine della quale, a circa 10^{-32} s, inizia il *Cold Big Bang*, che costituisce una fase di transizione nella quale l'universo è dominato da particelle non relativistiche, detta anche dominazione di materia (Liddle & Lyth, 2000) In questa fase la temperatura si è abbassata a $T = 10^5$ K. Durante l'inflazione la densità dell'universo è dominata dal potenziale di un campo scalare detto inflatone. Al termine del *Cold Big Bang* le particelle non relativistiche decadono velocemente in particelle relativistiche e in un processo chiamato *reheating*, durante il quale è possibile osservare un aumento della temperatura dell'universo, inizia un nuovo periodo detto *Hot Big Bang* nel quale è la radiazione a dominare. In questa era tutte le forze fondamentali sono ormai disaccoppiate e si formano i gluoni e le prime coppie di quark-antiquark, i fotoni si scindono e si accoppiano tra elettroni e positroni. Si ipotizza che in quest'era sia avvenuto un processo detto *asimmetria barionica*, ovvero che si sia creata l'asimmetria tra materia e antimateria. I quark condensano in androni e così i neutrini cessano di essere in equilibrio termico con il resto della materia, ha inizio la *ricombinazione*, ovvero la fase in cui gli elettroni si legano ai nuclei generando i primi atomi, la temperatura è troppo bassa perchè i fotoni possano rimuovere gli elettroni dai nuclei. Avviene quindi il disaccoppiamento totale di materia e radiazione e si genera la Radiazione Cosmica di Fondo.

1.2 LA RADIAZIONE COSMICA DI FONDO

La Radiazione Cosmica di Fondo (*Cosmic Microwave Background Radiation CMBR*) venne osservata per la prima volta nel 1964 dai fisici Penzias e Wilson grazie ad un radiotelescopio, è la radiazione elettromagnetica che permea l'universo ed è considerata come residuo "fossile" di quell'*esplosione* primordiale nella quale l'Universo ebbe origine circa 13 miliardi di anni fa, ovvero il Big Bang. Questa scoperta è una delle più importanti per la nostra attuale comprensione del

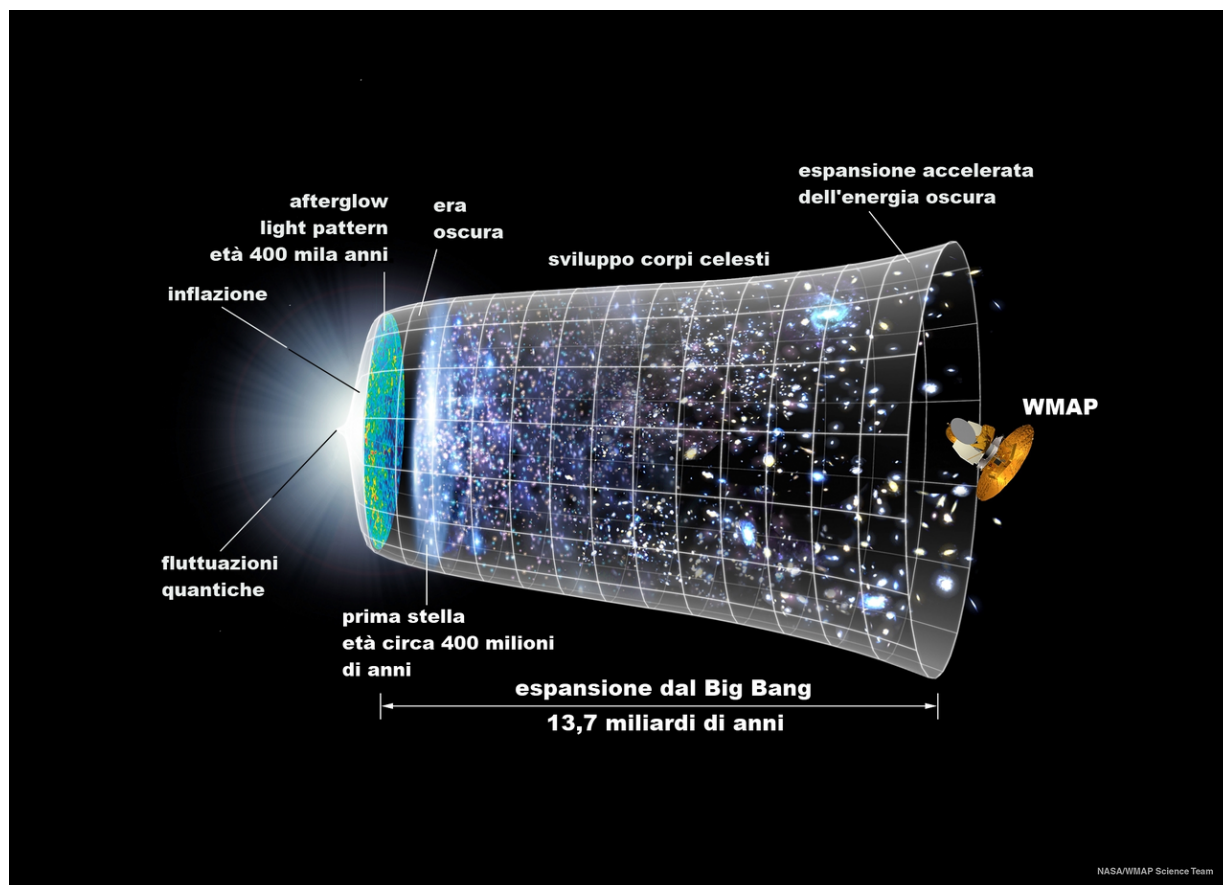


Figura 1.1: La storia dell'Universo dal Big Bang (circa 13.82 miliardi di anni fa) ad oggi. Le principali fasi dell'evoluzione, da quelle che hanno portato alla nascita della materia a quelle che hanno consentito l'aggregazione di strutture cosmiche sempre più complesse. Riferimento: <https://it.wikipedia.org/>

cosmo. Da questo momento in poi iniziarono un grande numero di osservazioni e studi teorici per definire con maggiore precisione la radiazione.

Nelle fasi iniziali della vita, prima della formazione di stelle e pianeti, l'universo era molto caldo e permeato da una radiazione uniforme in stretta interazione con il plasma di idrogeno. I fotoni impedivano agli elettroni di legarsi ai protoni, impedendo la formazione degli atomi. L'espansione dell'universo, dovuto all'esplosione iniziale, portò al raffreddamento del plasma e della radiazione, fino a raggiungere una temperatura che diminuì l'energia dei fotoni e quindi la possibilità di formazione dei primi atomi stabili. Da questo momento l'universo, che fino ad allora era una nebbia opaca, diventò trasparente alla radiazione, permettendo così la libera propagazione dei fotoni oltre la cosiddetta superficie di ultimo scattering. La radiazione liberata è l'osservabile "elettromagnetico" più antico a nostra disposizione. Fu inizialmente captata sotto forma di un ineliminabile eccesso di rumore nella banda di frequenze delle microonde, che presenta la stessa intensità in tutte le direzioni di osservazione del cielo. Da questa fortunosa scoperta, che nel 1978 valse il premio Nobel ai suoi artefici, cominciarono numerosi esperimenti volti a confermare la validità del modello del Big Bang.

All'inizio degli anni '90 le misure furono migliorate facendo ricorso a satelliti, in particolare all'esperimento FIRAS (*Far Infrared Absolute Spectrophotometer*) montato a bordo del satellite COBE (*Cosmic Background Explorer*). Le misure di COBE completarono l'analisi dello spettro

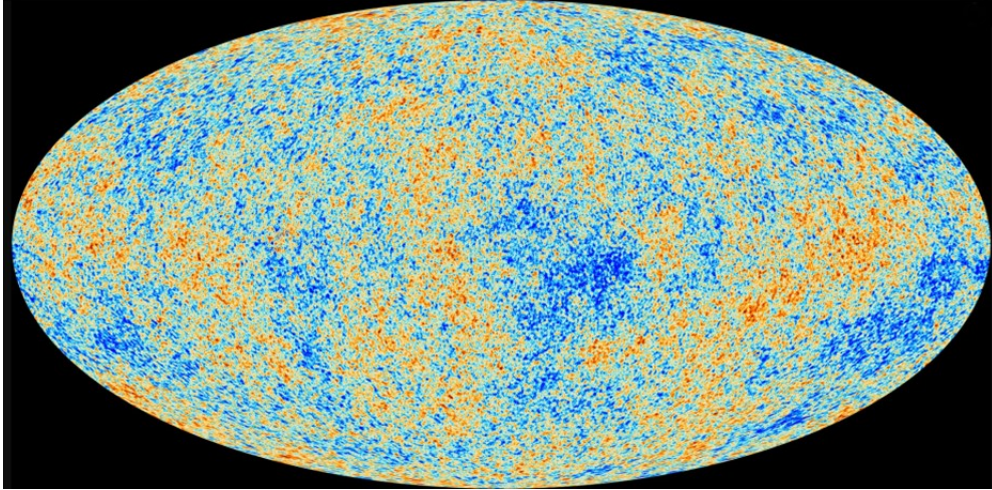


Figura 1.2: Mappa delle anisotropie del fondo cosmico a microonde viste dal satellite Planck <https://www.media.inaf.it>.

confermando sia la sua forma di corpo nero che l'anisotropia di dipolo ¹ a livelli di accuratezza mai raggiunti precedentemente. Le misure di CMBR furono effettuate sull'intera sfera celeste. La radiazione cosmica di fondo riempie tutto il cielo, è isotropa, la sua distribuzione spettrale è proprio quella di corpo nero, come atteso per radiazione emessa da un corpo in equilibrio termodinamico qual era l'Universo primordiale, oggi caratterizzato da una temperatura di circa

$$T = (2.7255 \pm 0.0006)K \quad (1.1)$$

come conseguenza del raffreddamento dovuto all'espansione.

Un'ulteriore fondamentale scoperta fu fatta dall'altro esperimento montato sempre sul satellite COBE, ovvero DMR (*Differential Microwave Radiometer*). Questo radiometro differenziale, sensibile a lievissime differenze di temperatura tra zone diverse di cielo, rilevò le anisotropie tanto cercate. L'anisotropia predominante è l'anisotropia di dipolo, dovuta al peculiare moto del sistema solare rispetto alla CMB:

$$\frac{\Delta T}{T_0} \approx \frac{v_{Sole}}{c} \cos \theta \quad (1.2)$$

dove $v_{Sole} \approx 369 km/s$. Per il dipolo viene calcolato $\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_{max} \approx 1.23 \times 10^{-3}$. Sottratto questo contributo rimangono delle anisotropie che sono una traccia di disomogeneità nella distribuzione di materia nell'Universo primordiale. Sotto l'azione della gravità si è formata la complessa e ricca struttura su grande scala che è possibile osservare oggi come galassie, ammassi e superammassi di galassie.

¹Il motivo della anisotropia della radiazione cosmica di fondo dipende dalla relatività. Infatti, per un osservatore in moto con una certa velocità v , uno spettro di corpo nero a temperatura T_0 si trasforma in un altro ad una temperatura diversa secondo la familiare formula dell'effetto Doppler. Al primo ordine di approssimazione nel rapporto $\beta = v/c$ dove $c \approx 300.000 km/s$ è la velocità della luce nel vuoto. Ciò produce un gradiente termico, cioè una variazione con l'angolo di osservazione θ , pari a $\Delta T(\beta, \theta) \approx T_0 \beta \cos \theta$. Per questo motivo, poiché la temperatura varia tra un polo "caldo", per $\cos \theta = 1$, ed un polo "freddo", per $\cos \theta = -1$, questa non uniformità della temperatura viene anche detta anisotropia "di dipolo". Ponendo $T_0 = 2.7K$ e $v \approx 300 km/s$ (come per la maggior parte dei moti cosmici della Terra) ci si aspettavano, dunque, differenze angolari di temperatura di pochi millesimi di grado Kelvin che, in linea di principio, si potevano rivelare misurando l'intensità della radiazione con antenne puntate in differenti direzioni. In questo modo, si potevano avere informazioni sulla velocità della Terra rispetto ad un sistema di riferimento universale, quello rispetto al quale la radiazione di fondo ha una forma esattamente isotropa.

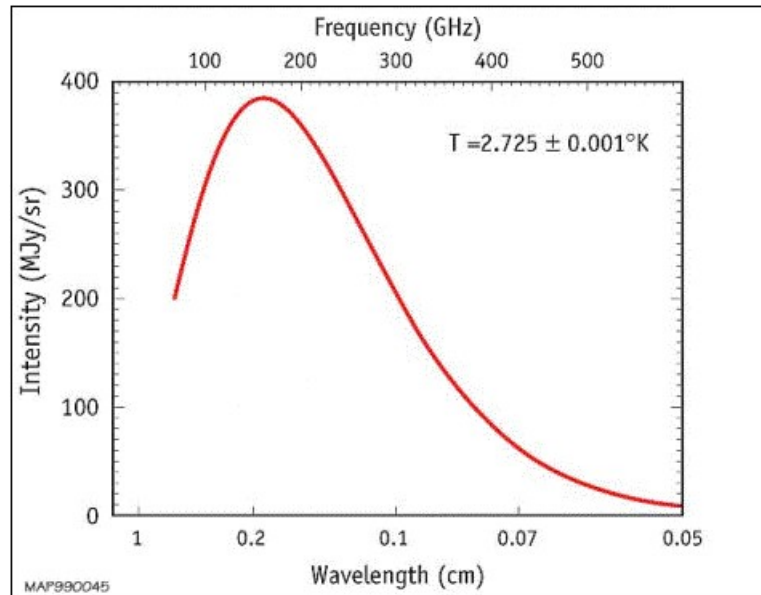


Figura 1.3: Lo spettro di corpo nero della radiazione cosmica di fondo osservato da COBE <http://astrocultura.uai.it>.

Un'ulteriore prova a sostegno della CMBR è la Nucleosintesi Primordiale (*Big Bang nucleosynthesis BBN*) ovvero il processo di produzione degli elementi chimici durante le prime fasi dell'universo. I primi nuclei si formarono dopo qualche minuto dal Big Bang, dopodiché la temperatura e la densità dell'universo sono cadute sotto i valori richiesti per la fusione nucleare. La breve durata è fondamentale poiché non ha permesso la formazione di elementi più pesanti come il berillio. Nessun altro fenomeno è in grado di spiegare come mai nell'Universo esista un'abbondanza del 25% di elio-4. L'unico ambiente nel quale si produce questo elemento sono le stelle. La teoria della nucleosintesi primordiale spiega e giustifica esattamente la presenza di questa abbondanza che oggi è possibile osservare. Il parametro chiave per che consente di calcolare gli effetti della nucleosintesi è il rapporto tra fotoni e barioni. Questo parametro corrisponde alla temperatura ed alla densità dell'Universo iniziale e permette di determinare le condizioni ideali sotto le quali la fusione ideale ha avuto luogo (Coc & Vangioni, 2017).

1.3 ESPANSIONE DELL'UNIVERSO

L'espansione metrica dello spazio è l'aumento medio della distanza misurata tra due oggetti nell'Universo al variare del tempo. Si tratta di un'espansione intrinseca, cioè definita dalla continua creazione di spazio e non dal movimento in uno spazio preesistente. L'espansione metrica è una caratteristica fondamentale della teoria del Big Bang ed è espressa matematicamente attraverso la metrica di di Friedmann. Questo modello è valido su ampie scale, ovvero a livello di superammassi galattici. L'espansione dell'Universo è causata dall'inerzia conseguente alla spinta del Big Bang e dall'energia oscura responsabile dell'accelerazione dell'espansione. La velocità di recessione è la velocità con la quale le galassie sembrano allontanarsi le une dalle altre a causa dell'espansione dell'universo; Recentemente è stata stimata essere 74.05 Km/s per megaparsec (Di Valentino et al., 2021).

1.3.1 Le equazioni di Friedmann

Uno dei più importanti principi da considerare in cosmologia è il Principio Cosmologico², secondo il quale nell'universo non esistono posizioni e direzioni privilegiate e su grande scala può essere considerato omogeneo e isotropo. In seguito alla formulazione della teoria della Relatività Generale sintetizzata dalle equazioni di campo di Einstein, molti fisici si sono dedicati alla loro risoluzione così da determinare la dinamica dell'universo. Il primo scienziato che si accorse che in esse vi era intrinsecamente nascosta l'ipotesi di una non staticità fu il fisico e matematico Alexander Friedman. Egli trovò tre soluzioni con il quale studiare la dinamica dell'universo:

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = \frac{-4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\kappa c^2}{\alpha^2} \quad (1.4)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{\alpha}}{\alpha} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \quad (1.5)$$

con α fattore di scala o fattore di espansione dell'universo, ρ densità di energia, P è la pressione, G è la costante di gravitazione universale, c è la velocità della luce, κ è la costante che varia a seconda della geometria dell'universo:

- $\kappa = 0$ geometria cartesiana - euclidea \rightarrow Universo piatto
- $\kappa = 1$ geometria ipersferica - pseudoeuclidea \rightarrow Universo chiuso
- $\kappa = -1$ geometria iperboloidica - pseudoeuclidea \rightarrow Universo aperto

Dunque, risulta fondamentale comprendere quale universo è necessario prendere in considerazione, poichè la distanza degli eventi cambia al variare della geometria dell'universo. Friedman riuscì a stabilire una metrica della quale ci possiamo servire per misurare le distanze tra due eventi nello spazio-tempo. La metrica rispetta le condizioni di isotropia e omogeneità alla base del principio cosmologico:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \alpha(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (1.6)$$

1.3.2 Redshift

In ambito cosmologico si parla di *Redshift* quando un'onda elettromagnetica è emessa da una sorgente in allontanamento e ha una lunghezza d'onda maggiore rispetto a quando una sorgente

²Il principio cosmologico sostiene che l'universo sia omogeneo e isotropo su una scala opportunamente grande, a partire da 1000 Mpc. Esso limita fortemente il numero di teorie cosmologiche possibili. Il principio cosmologico estende a livello cosmico il principio copernicano, secondo cui l'uomo non occupa una posizione privilegiata nel cosmo, e presuppone che le leggi della fisica siano le stesse ovunque nell'universo.

A piccola scala l'universo appare disomogeneo, disomogeneità che tende a scomparire se vengono considerati interi ammassi di galassie. Per questa ragione il Principio cosmologico si scontra con il cosiddetto problema dell'induzione, ovvero che osservazioni empiriche limitate a particolari regioni dello spazio non possono dire nulla sullo stato di altri corpi esterni a tali regioni. Spazi eterogenei spesso contengono regioni omogenee ed isotrope, eventualmente distribuite irregolarmente e la Terra potrebbe trovarsi in una di queste regioni. Questo principio fu utilizzato da Einstein e altri studiosi, che cercarono di applicare le equazioni della Relatività Generale all'universo nel suo insieme. Il principio cosmologico è stato supportato da numerose osservazioni astronomiche tra cui quella dell'isotropia quasi perfetta della CMBR.

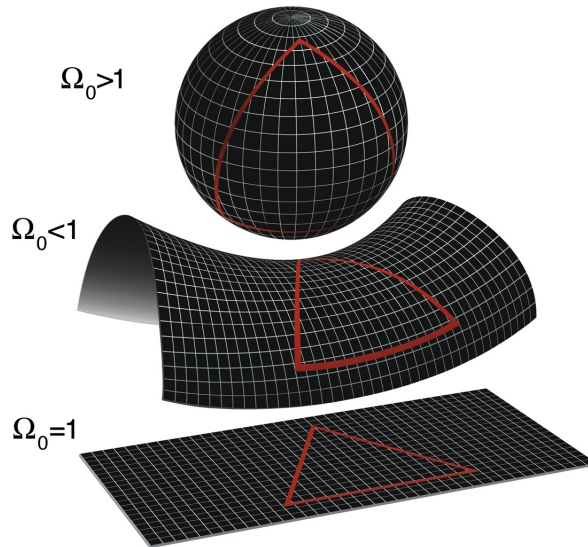


Figura 1.4: Tre tipi di curvatura dell'universo espressi in funzione del valore di Ω

è a riposo. In generale ad un aumento della distanza corrisponde una diminuzione della frequenza ossia una diminuzione dell'energia dei fotoni coinvolti. Al contrario, se l'oggetto si avvicina all'osservatore si ha il cosiddetto spostamento verso il blu o *blueshift* quando un'onda elettromagnetica è emessa da una sorgente in avvicinamento e ha una lunghezza d'onda minore rispetto a quando la sorgente si trova a riposo. Una diminuzione della distanza corrisponde ad un aumento della frequenza che equivale ad un incremento di energia dei fotoni coinvolti. Dunque, la diminuzione di una lunghezza d'onda si verifica quando una sorgente di luce si muove verso un osservatore.

Un caso particolare è quando la radiazione elettromagnetica entra in un campo gravitazionale (Carroll et al., 2007). La luce (e ogni forma di radiazione elettromagnetica dotata di una lunghezza d'onda) che si origina da una sorgente situata in una regione attraversata da un intenso campo gravitazionale, man mano che risale il campo gravitazionale perde energia; poichè l'energia è legata alla frequenza dell'onda si avrà dunque il corrispondente aumento della lunghezza d'onda.

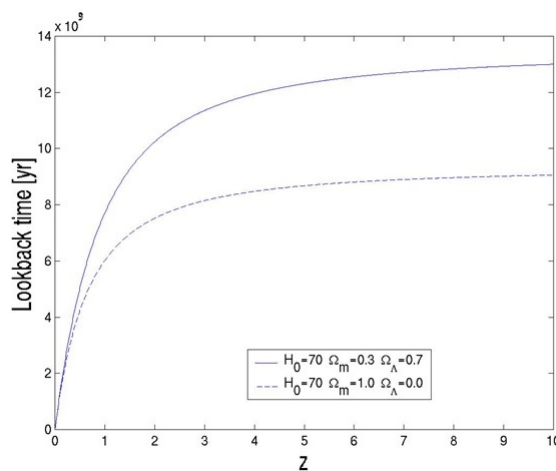


Figura 1.5: In questa figura è possibile osservare la *look back time function*. Questa funzione permette di associare ad un certo redshift la corrispondente epoca in termini di anni; si noti come la curva è intrinsecamente legata al modello cosmologico adottato per descrivere l'universo <https://astronomy.stackexchange.com>.

Le osservazioni cosmologiche sono concordi nell'affermare che la lunghezza d'onda λ_{em} di un fotone emesso da una sorgente distante è diversa dalla lunghezza d'onda osservata λ_{obs} dalla Terra. Dunque, è possibile definire un parametro che tenga in considerazione la differenza tra λ_{em} al tempo t_{em} e λ_{obs} al tempo $t_{obs}=t_0$:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (1.7)$$

La ragione di tale differenza sta nel fatto che gli oggetti in questione, coinvolti nell'espansione dell'universo, si muovono con una velocità v_r rispetto ad un sistema di riferimento solidale con l'osservatore.

- $z > 0$ - *redshift* universo in espansione
- $z < 0$ - *blueshift* universo in contrazione

In accordo con la seguente formula, z è inoltre in grado di dirci come cambia il fattore scala dell'universo, una volta che è stata emessa la radiazione:

$$1 + z = \frac{\alpha_0}{\alpha(t)} \quad (1.8)$$

1.3.3 La legge di Hubble

Nel 1929 Hubble integrando le sue misure delle distanze tra le galassie e le misure dei *redshift* scoprì una relazione di proporzionalità tra distanza della galassia e la sua velocità di espansione (Hubble, 1929). La distanza tra P e l'origine di un sistema di riferimento P_0 , in coordinate polari, ad un certo istante fissato $dt = 0$ presi $d\theta = d\phi = 0$, è chiamata distanza propria e si ottiene integrando la metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FRLW) da $P_0 = (0, 0, 0)$ a $P = (r, 0, 0)$:

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{a(t)}{\sqrt{1 - Kr'^2}} dr' \rightarrow d_{pr} = \alpha(t)F(r) \quad (1.9)$$

- $\kappa = 0 \rightarrow F(r) = r$
- $\kappa = 1 \rightarrow F(r) = \sin^{-1}(r)$
- $\kappa = -1 \rightarrow F(r) = \sinh^{-1}(r)$

La distanza propria è una quantità misurabile che dipende dal fattore scala, possiamo definire la distanza comovente come d_{pr} calcolata rispetto all'origine dell'asse temporale t_0 :

$$d_C \equiv d_{pr}(t_0) = a(t_0)F(r) = a_0F(r) \quad (1.10)$$

In cosmologia la *distanza comovente* risulta conveniente per definire le distanze tra oggetti in modo indipendente dal tempo: è la separazione che gli oggetti avrebbero oggi se entrambi non si muovessero. Per *distanza propria* si intende la separazione tra due oggetti in un preciso istante del tempo cosmologico trascorso a partire dal Big Bang. La relazione tra distanza propria e distanza comovente è la seguente:

$$d_{pr} = d_C \frac{a(t)}{a_0} \quad (1.11)$$

A questo punto possiamo definire la Legge di Hubble:

$$v_R \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d_{pr} = H(t) d_{pr} \quad (1.12)$$

Quest'ultima è la famosa Legge di Hubble, nella quale $H_0 \equiv H(t_0)$ è la cosiddetta costante di Hubble. Tale parametro permette di conoscere l'attuale velocità di espansione dell'universo.

1.4 RILEVAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI PRIMORDIALI OSCURATE

Come osservato in precedenza ci si aspetta che le onde gravitazionali primordiali creino un segnale stocastico di fondo. Tuttavia il segnale primordiale di fondo viene oscurato da un segnale astrofisico in primo piano, caratterizzato da onde gravitazionali che si formano attraverso la fusione di corpi massivi come stelle di neutroni oppure buchi neri. Di seguito verrà analizzato un metodo Bayesiano per stimare il segnale di fondo primordiale in presenza di rumore.

1.4.1 Metodo Bayesiano per rilevare onde gravitazionali oscure

Recenti studi hanno seguito un approccio sottrattivo per misurare i parametri di sistemi binari. Inevitabilmente questi risultati portano con sé errori sistematici provenienti da una imperfetta sottrazione (Cutler & Harms, 2006). Altre analisi hanno proposto metodi per la misurazione simultanea di onde gravitazionali di fondo con differenti forme spettrali (Ungarelli & Vecchio, 2004; Parida et al., 2016). Tuttavia queste metodologie portano ad una diminuzione della sensibilità della ricerca, poichè il primo piano astrofisico non presenta una forma Gaussiana. Per questa ragione, il problema viene analizzato attraverso un approccio Bayesiano, nel quale la parte di segnale e di rumore vengono analizzate simultaneamente, assicurando che il segnale primordiale di fondo sia privo di qualsiasi tipo di bias. Il segnale cosmologico di fondo è formalizzato come segue;

$$\Omega_{gw}(f) = \Omega_\alpha \left(\frac{f}{25\text{Hz}} \right) \quad (1.13)$$

in cui α è un *power-law index*, mentre Ω_α rappresenta l'ampiezza.

In quest'analisi vengono considerati solamente fusioni tra buchi neri, limitando i costi computazionali provenienti dall'analisi di fusioni tra stelle di neutroni. Seguendo Romano et al., 2017 e Smith & Thrane, 2018, la *likelihood* di *frequency domain strain data*, s_{ik} , con un segnale stocastico di fondo è caratterizzata dai parametri (Ω_α, α) mentre una fusione binaria con segnale $h_k(\theta)$ è derivata marginalizzando rispetto alla perturbazione casuale del background:

$$\mathcal{L}(s_{ik}|\theta, \Omega_\alpha, \alpha) = \frac{1}{\det(\pi T \mathbf{C}_k(\Omega_\alpha, \alpha)/2)} \exp\left(-\frac{2}{T}(s_{ik} - h_\kappa(\theta))^\top \mathbf{C}_\kappa^{-1}(\Omega_\alpha, \alpha)(s_{ik} - h_\kappa(\theta))\right) \quad (1.14)$$

Assumendo che i dati siano divisi in due segmenti T (contrassegnati dall'indice i) la *frequency dependence* è contrassegnata da k :

$$s_{i,\kappa} = \begin{pmatrix} 1 \\ s_{i,\kappa} \\ 2 \\ s_{i,\kappa} \end{pmatrix} h_\kappa(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ h_\kappa(\theta) \\ 2 \\ h_\kappa(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Nella (1.15) sono presenti due rilevatori per quantificare la radiazione di fondo (infatti un solo rilevatore non è in grado di discernere il segnale dal rumore). La *frequency-dependent covariance matrix*, \mathbf{C}_κ include il contributo di entrambi i rilevatori.

$$\mathbf{C}_\kappa = \begin{pmatrix} P_1(f_\kappa) + \kappa_{11}(f_\kappa)\Omega_{gw} & \kappa_{12}(f_\kappa)\Omega_{gw} \\ \kappa_{21}(f_\kappa)\Omega_{gw} & P_2(f_\kappa) + \kappa_{22}(f_\kappa)\Omega_{gw} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$\kappa_{IJ}(f_\kappa) \equiv \gamma_{IJ}(f_\kappa) \frac{3H_0^2}{10\pi^2 f^3} \quad (1.17)$$

nella \mathbf{C}_κ è possibile osservare *noise power spectral density* (PSD) $P_I(f_\kappa)$ e *primordial background energy density*. Tale matrice è in grado di convertire il *primordial background energy density* Ω_{gw} in un *strain power spectral density* (Romano et al., 2017; Mingarelli et al., 2019). La variabile $\gamma_{IJ}(f_\kappa)$ è la funzione di riduzione della sovrapposizione per il paio di rilevatori IJ . La variabile γ_{IJ} viene normalizzato uguale a 1 per i rilevatori coallineati con braccia perpendicolari. H_0 rappresenta la costante di Hubble e come detto in precedenza viene usata per descrivere l'espansione dell'universo. A questo punto è possibile ottenere la *likelihood* dei dati astrofisici:

$$\mathcal{L}(s_i|\theta, \Omega_\alpha, \alpha) = \prod_k^m \mathcal{L}(s_{i,\kappa}|\theta, \Omega_\alpha, \alpha) \quad (1.18)$$

Per un primo piano astrofisico non-Gaussiano è importante rilevare la frazione di segmento contenente il segnale ξ . Possiamo osservare come un segmento contenga un segnale binario rappresentato da una parte di segnale e da una parte di rumore. In questo caso la *likelihood* in (1.18) può essere marginalizzata sul parametro binario θ per ottenere:

$$\mathcal{L}(s_i|\Omega_\alpha, \alpha, \xi) = \xi \mathcal{L}_S(s_i|\Omega_\alpha, \alpha) + (1 - \xi) \mathcal{L}_N(s_i|\Omega_\alpha, \alpha) \quad (1.19)$$

qui viene marginalizzata la *likelihood* del segnale e del rumore come:

$$\mathcal{L}_S(s_i|\Omega_\alpha, \alpha) = \int d\theta \mathcal{L}(s_i|\theta, \Omega_\alpha, \alpha) \pi(\theta) \quad (1.20)$$

$$\mathcal{L}_N(s_i|\Omega_\alpha, \alpha) = \mathcal{L}(s_i|\theta = 0, \Omega_\alpha, \alpha) \quad (1.21)$$

$\theta = 0$ indica che la *likelihood* del rumore è funzionalmente identica alla *likelihood* del segnale se poniamo $h_k(\theta) = 0$. Per un insieme di N segmenti di dati, s , la *likelihood* totale è data dal prodotto dei segmenti individuali:

$$\mathcal{L}(s|\Omega_\alpha, \alpha, \xi) = \prod_i^N \mathcal{L}(s_i|\Omega_\alpha, \alpha, \xi). \quad (1.22)$$

la (1.22) rappresenta il prodotto di N segmenti di *likelihood*, ognuno dei quali contiene una parte di segnale (con probabilità ξ) e una parte di errore (con probabilità $1 - \xi$). Ora per ottenere la probabilità a posteriori sui parametri $(\Omega_\alpha, \alpha, \xi)$, viene applicato il teorema di Bayes:

$$p(\Omega_\alpha, \alpha, \xi|s) = \frac{\pi(\Omega_\alpha, \alpha, \xi)}{\mathcal{Z}} \mathcal{L}(s|\Omega_\alpha, \alpha, \xi) \quad (1.23)$$

dove \mathcal{Z} corrisponde a:

$$\mathcal{Z} = \int d\Omega_\alpha d\alpha d\xi \mathcal{L}(s|\Omega_\alpha, \alpha, \xi) \pi(\Omega_\alpha, \alpha, \xi) \quad (1.24)$$

e $\pi(\Omega_\alpha, \alpha, \xi)$ è la prior. Questo metodo presenta comunque delle limitazioni nell'accuratezza della rilevazione delle onde gravitazionali primordiali di fondo (infatti i parametri del fondo stocastico potrebbero presentare alcuni bias). Rilevatori di terza generazione potrebbero risolvere questo problema. In questo lavoro cercheremo di adattare questo metodo formale all'Analisi Fattoriale Confermativa con l'obiettivo di capire quanto effettivamente le variabili osservate siano in grado di spiegare i tratti latenti e a quanto ammonti la parte residua. Per fare ciò sostituiranno i parametri appartenenti alla CFA all'interno del modello appena illustrato.

Capitolo 2

Misurare segnali latenti in psicometria

2.1 CFA: BREVE INTRODUZIONE

La CFA è tra le procedure più utilizzate nella ricerca applicata in diversi campi (per esempio psicologia, educazione, sociologia, scienze politiche, salute pubblica ecc.). L'intento fondamentale dell'analisi fattoriale confermativa è quello di determinare il numero e la natura delle variabili latenti (fattori) che spieghino la covariazione osservata tra misure osservate o indicatori. Nello specifico, un fattore è un costrutto intangibile (misurando) che influenza le misure osservate e che spiega la covariazione tra di esse. In altri termini, le misure osservate risultano inter-correlate poiché condividono una causa comune (ad esempio quando sono influenzate dallo stesso costrutto latente) tale che se il costrutto latente venisse escluso, la covarianza tra le misure osservate si annullerebbe.

L'analisi fattoriale confermativa è spesso usata in psicometria applicata per valutare strumenti caratterizzati da item o indicatori multipli (ad esempio questionari). Uno degli usi più comuni dell'analisi fattoriale confermativa include la validazione di costrutto e la riduzione di dati (ad esempio, riducendo un dataset numeroso di indicatori intercorrelati ad un più piccolo set di variabili composite, usando i *factor scores*).

L'analisi fattoriale confermativa scompone la varianza di ogni indicatore osservato in due parti:

- *Common Variance*, stimata sulla base della varianza condivisa con gli altri indicatori nell'analisi;
- *Unique Variance*, combinazione di varianze specifiche per l'indicatore (come i fattori sistematici che influenzano solamente un indicatore) e la varianza dell'errore casuale (errori di misurazione).

Nei diversi usi, la CFA offre un importante contesto analitico per la valutazione di equivalenza dei modelli di misura tra gruppi distinti. L'invarianza di misura è un importante aspetto dello sviluppo della scala, permette di valutare se uno strumento sia appropriato per un'analisi multigruppo.

2.1.1 CFA: modello

La CFA è un modello parametrico specificato da *factor loadings*, varianze uniche e varianze dei fattori. I *factor loadings* rappresentano una sorta di coefficienti di regressione che pesano gli

indicatori osservati dal fattore. Le varianze uniche sono le varianze dell'indicatore non spiegate dai fattori (tipicamente considerate come l'errore di misurazione). La varianza del fattore esprime la variabilità del campione o la dispersione del fattore. Una CFA inoltre può includere le covarianze d'errore che rappresentano il fatto che due indicatori covarino per ragioni diverse dal fattore latente.

Nella Figura 2.1 viene rappresentato un esempio di modello a due fattori. I parametri sono i seguenti *factor loadings* identificati con λ (indicano i coefficienti di depressione).

Le varianze e covarianze tra i fattori latenti vengono rappresentate da Φ mentre quelle delle variabili osservate da θ

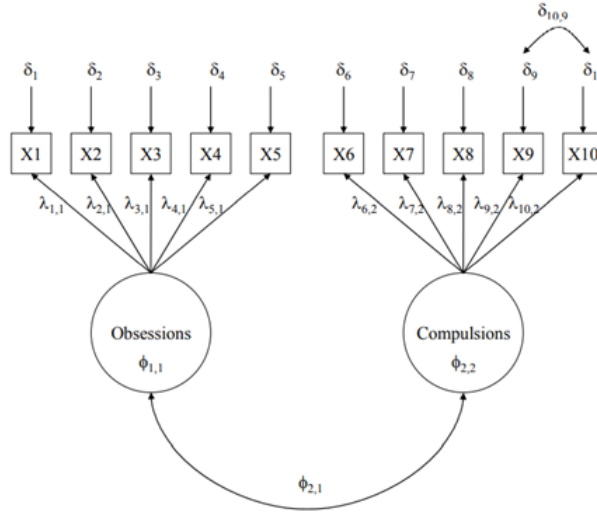


Figura 2.1: Esempio di CFA con due fattori latenti, ossessione e compulsione

Più formalmente, considerando $\mathbf{Y}_q = (Y_1, \dots, Y_q)$ e $\mathbf{Y}_p = (Y_1, \dots, Y_p)$ è possibile scrivere la CFA come modello probabilistico condizionato:

$$\mathbf{Y}_q \sim f(\mathbf{Y}_q; \theta^{(2)}) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{Y}_p \sim f(\mathbf{Y}_p | \mathbf{Y}_q; \theta^{(1)}) \quad (2.2)$$

dove gli esiti delle variabili osservate \mathbf{Y}_p si realizzano condizionatamente agli esiti delle variabili latenti \mathbf{Y}_q . Indicando $\boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{Y}_q$ e assumendo che le realizzazioni $i = 1, \dots, n$ delle variabili osservate e latenti siano indipendenti e con identica distribuzione, avremo il seguente modello:

$$\boldsymbol{\eta}_i \sim f(\boldsymbol{\eta}_i; \theta^{(1)}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\eta}_i \sim f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\eta}_i; \theta^{(2)}) \quad (2.4)$$

dove $\theta^{(1)}$ è il vettore $k \times 1$ di parametri che governa la densità delle variabili latenti, mentre $\theta^{(2)}$ è il vettore di $h \times 1$ di parametri della densità delle osservate.

Assumendo che le variabili latenti seguano una distribuzione Gaussiana q -variata

$$\boldsymbol{\eta}_i \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{\mu}_i, \Phi) \quad (2.5)$$

con media $\boldsymbol{\mu}_i$ (vettore $q \times 1$ di reali) e matrice $\boldsymbol{\Phi}_{q \times q}$ di covarianza e assumendo un modello Gaussiano per l'errore delle misurazioni:

$$\boldsymbol{\delta}_i \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Theta}_\delta) \quad (2.6)$$

dove $\mathbf{0}_p$ è un vettore $p \times 1$ di zeri (medie nulle) mentre $\boldsymbol{\Theta}_\delta$ è la matrice $p \times p$ di varianze e covarianze diagonale, il modello probabilistico marginale delle variabili che governano le misurazioni è il seguente:

$$\mathbf{y}_i \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\Theta}_\delta) \quad (2.7)$$

dove la prima parte corrisponde al vettore $\boldsymbol{\mu}_y$ delle medie marginali delle variabili osservate mentre la seconda parte corrisponde alla matrice di covarianza $\boldsymbol{\Sigma}_y$ di ordine $p \times p$. Solitamente si assume che $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\tau}$ siano uguali a zero, per cui rimane la matrice di varianze-covarianze:

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\Theta}_\delta \quad (2.8)$$

Dalla (2.7) è possibile notare che la relazione tra variabili latenti e variabili osservate è:

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{\delta}_i \quad (2.9)$$

dove $\boldsymbol{\tau}_i$ è il vettore $p \times 1$ delle intercette, $\boldsymbol{\Lambda}$ è una matrice $p \times q$ di coefficienti reali che legano le p osservate alle q latenti, invece $\boldsymbol{\delta}_i$ è il vettore $p \times 1$ di errore del modello.

2.2 CFA TIPO MISTURA PER POPOLAZIONI ETEROGENEE

Nelle scienze comportamentali l'eterogeneità delle popolazioni è inevitabile. (Hoshino, 2001). Tuttavia ci sono alcune situazioni in cui non è possibile conoscere a quale popolazione appartiene ciascuna osservazione per questa ragione tali popolazioni vengono definite eterogenee. L'eterogeneità delle popolazioni potrebbe essere osservata oppure non osservata. Nel primo caso il campione può essere diviso in due gruppi (ad esempio per la variabile *genere*) e quindi l'analisi dei dati è possibile attraverso metodi multi-gruppo. Un campione potrebbe essere costituito da sotto-popolazioni esplicitamente definite e il principale obiettivo è quello di confrontare questi due gruppi. Nella seconda situazione l'appartenenza dei soggetti ad un gruppo non è conosciuta a priori, per cui i dati vengono analizzati attraverso modelli di classi latenti. I punteggi ai test cognitivi potrebbero riflettere due o più tipi di sotto-popolazioni nel campione. L'interesse potrebbe essere quello di osservare a quale gruppo un dato soggetto sia più probabile appartenga. In questo contesto le sotto-popolazioni vengono chiamate classi latenti poiché l'appartenenza ad un gruppo è latente (Lubke & Muthén, 2005). A tal proposito, la psicopatologia è un campo nel quale è spesso riscontrabile una situazione di popolazione eterogenea non osservata, un disordine potrebbe avere alcune sfumature e sotto-tipologie nella propria manifestazione, per tale ragione un obiettivo potrebbe essere quello di individuarli.

2.2.1 Metodi di analisi per popolazioni eterogenee

Sono stati utilizzati differenti metodi per l'analisi dell'eterogeneità osservata/non osservata. I *factor mixture models* sono uno strumento utile per esplorare l'eterogeneità non osservata nella popolazione, poiché sono una combinazione tra il *common factor model* (Thurstone, 1947) e il *latent class model* (LCM) (Lazarsfeld et al., 1968). Il *common factor model* è appropriato per dati provenienti da singole popolazioni omogenee ed è progettato per investigare il contenuto

comune di punteggi osservati come per esempio gli items di un questionario. LCM ha la funzione di raggruppare i partecipanti in sottopopolazioni, in una situazione in cui non si conosce a quale gruppo ogni partecipante appartenga. I sottogruppi potrebbero differire qualitativamente oppure quantitativamente tra loro. Il *factor mixture model* possiede una singola variabile categoriale e una o più variabili continue. Come LCM, la variabile latente categoriale ha la funzione di modellare l'eterogeneità non osservata della popolazione. Nel *common factor model* le variabili osservate non sono indipendenti, in altre parole possono covariare tra loro e la covarianza viene modellata attraverso i fattori. Ad esempio, se maschi e femmine differiscono rispetto alla loro performance in un test di matematica, il genere esprime almeno parte dell'eterogeneità nei dati. L'eterogeneità indotta dal genere può avere numerose forme differenti potrebbe infatti predire il gruppo di appartenenza, il punteggio nel test oppure entrambi.

2.3 DALLA MISURAZIONE DEL SEGNALE GRAVITAZIONALE ALLA MISURAZIONE DEL SEGNALE PSICOMETRICO

La funzione di verosimiglianza descrive la probabilità congiunta dei dati osservati in funzione dei parametri del modello (Valavanis, 1959):

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; Y) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_i) \quad (2.10)$$

Come osservato nel paragrafo 2.3 dove la *likelihood* totale è:

$$\mathcal{L}(s|\boldsymbol{\Omega}_\alpha, \boldsymbol{\alpha}, \xi) = \prod_i^N \mathcal{L}(s_i|\boldsymbol{\Omega}_\alpha, \boldsymbol{\alpha}, \xi) \quad (2.11)$$

Rispetto al modello introdotto nel paragrafo 1, è infatti possibile osservare un segmento contenente una parte vera della misura e una parte residua, pesate rispettivamente dalle probabilità di successo ξ e da $(1 - \xi)$:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_i) = \xi \mathcal{L}_S(\boldsymbol{\Omega}_\alpha, \boldsymbol{\alpha}; \mathbf{y}_i) + (1 - \xi) \mathcal{L}_N(\boldsymbol{\Omega}_\alpha, \boldsymbol{\alpha}; \mathbf{y}_i) \quad (2.12)$$

dove la componente di verosimiglianza relativa al segnale è riscritta marginalizzando su $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_i) = \xi \int \mathcal{L}_S(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega}_\alpha, \boldsymbol{\alpha}) f(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} + (1 - \xi) \mathcal{L}_N(\boldsymbol{\theta} = 0, \boldsymbol{\Omega}_\alpha, \boldsymbol{\alpha}) \quad (2.13)$$

ponendo $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\eta}$ e indicando i parametri del modello tramite $\boldsymbol{\theta}$ è possibile notare come la prima componente della mistura di verosimiglianze corrisponda ad un modello CFA canonico:

$$F(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \int F(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\theta}) F(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \quad (2.14)$$

mentre la seconda componente della mistura corrisponde ad un modello CFA in cui le variabili latenti $\boldsymbol{\eta}$ sono poste a zero (nella notazione originale $\boldsymbol{\theta} = 0$)

Complessivamente il modello CFA che corrisponde al modello di misurazione del segnale astronomico primordiale è il seguente:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}_\delta) = \xi \mathcal{L}_s(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}_\delta^{(1)}; \mathbf{y}_i) + (1 - \xi) \mathcal{L}_N(\boldsymbol{\Theta}_\delta^{(2)}; \mathbf{y}_i) \quad (2.15)$$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}_\delta) = \xi \int_{\mathbb{R}} F(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Theta}_\delta^{(1)}) F(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\Phi}) d\boldsymbol{\eta} + (1 - \xi) F(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\Theta}_\delta^{(2)}) \quad (2.16)$$

si noti come la seconda componente del modello di misura è un modello multivariato Gaussiano a media nulla e matrice di covarianza $\Theta_{\delta}^{(2)}$.

La stima dei parametri del modello CFA mistura $\{\xi, \Lambda, \Phi, \Theta_{\delta}^{(1)}, \Theta_{\delta}^{(2)}\}$ avviene attraverso algoritmi di tipo MCMC.

2.4 ALGORITMO HAMILTONIANO MEDIANTE "STAN"

Nell'approccio Bayesiano, la distribuzione a posteriori contiene tutto il necessario per fare inferenza. In pratica, la distribuzione a posteriori può essere difficile da stimare con precisione. La maggior parte delle analisi richiede l'uso di metodi di simulazione al fine di restituire accurate stime.

I metodi Markov chain Monte Carlo (MCMC) campionano da una distribuzione target, nel quale ogni unità è dipendente da quella precedente. Stan è un linguaggio di programmazione usato soprattutto come campionatore MCMC per le analisi Bayesiane e permette di specificare i parametri presenti nel modello insieme alle densità target. I due algoritmi usati in Stan per le simulazioni sono *Hamiltonian Monte Carlo* (HMC) e la sua variante *no-U-turn sampler* (NUTS). Si supponga di indicare con $p(\theta)$ la distribuzione target in uno spazio parametrico costituito dal vettore θ dei parametri del modello, detto anche posizione. Per prima cosa, l'HMC introduce delle variabili ausiliarie ρ chiamate *momentum* ed estrae valori della densità congiunta

$$p(\theta, \rho) = p(\rho|\theta)p(\theta) \quad (2.17)$$

nella maggior parte delle applicazioni dell'HMC, compreso Stan, la densità ausiliaria è una normale multivariata indipendente dai parametri theta, ovvero

$$\rho \sim \text{MultiNormal}(0, \mathbf{M}) \quad (2.18)$$

La matrice di covarianza M permette di ruotare e ridimensionare la distribuzione target. La densità congiunta $p(\rho, \theta)$ definisce il cosiddetto Hamiltoniano dove

$$\begin{aligned} H(\rho, \theta) &= -\log p(\rho, \theta) \\ &= -\log p(\rho|\theta) - \log p(\theta) \\ &= T(\rho|\theta) + V(\theta) \end{aligned} \quad (2.19)$$

dove $T(\rho|\theta)$ è chiamato energia potenziale e corrisponde all'opposto della log-posterior. L'energia potenziale è specificata da Stan attraverso la definizione di una log-density:

$$\begin{aligned} T(\rho|\theta) &= -\log p(\rho|\theta) \\ V(\theta) &= -\log p(\theta) \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.4.1 Generazione di transizioni

L'algoritmo Hamiltoniano campiona da un set di valori iniziali per i parametri in θ , specificati dall'utente oppure generati da Stan in modo casuale. A partire da questi valori nella prima iterazione, o dai valori correnti dei parametri in θ , viene generata una transizione attraverso una serie di "balzi". Viene estratto dalla distribuzione 3.18 un vettore di valori casuali per il

momentum, indipendentemente da θ ; in seguito il sistema congiunto (θ, ρ) costituito da valori correnti dei parametri θ e dal nuovo ρ si evolve attraverso le cosiddette equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (2.21)$$

con la densità e il *momentum* indipendente dalla distribuzione target, ovvero $p(\rho|\theta) = p(\rho)$, dunque $\partial T/\partial \theta$ è uguale a 0, in questo modo:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial \rho} \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (2.22)$$

2.4.2 Integratore Leapfrog

Stan utilizza Leapfrog per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali. Leapfrog è il più semplice algoritmo appartenente alla classe dei cosiddetti algoritmi symplettici, adattato nello specifico per fornire risultati stabili nello studio di sistemi Hamiltoniani. L'algoritmo inizia generando il nuovo vettore per il *momentum*, indipendentemente dal valore dei parametri θ e dal *momentum* precedente, che in questo modo non viene conservato attraverso le interazioni, per poi alternare l'aggiornamento di ρ sulla base di θ e viceversa secondo la dinamica Hamiltoniana del sistema. Le soluzioni ottenute dopo un numero L di passaggi leapfrog, ognuno della durata di un piccolo intervallo di tempo discreto ϵ , sono indicate come (ρ^*, θ^*) .

$$\boldsymbol{\rho} \sim \text{MultiNormal}(0, \mathbf{M}) \quad (2.23)$$

alterna quindi aggiornamenti a mezzo passo del *momentum* e aggiornamenti a passo intero della posizione

$$\begin{aligned}\rho &\leftarrow \rho - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \theta &\leftarrow \theta + \epsilon M^{-1} \rho\end{aligned}\quad (2.24)$$

l'integratore d'errore è dell'ordine di ϵ^3 per ogni passo, dove ϵ rappresenta l'intervallo di tempo.

2.4.3 Metropolis accept step

Tenendo conto di possibili errori numerici che potrebbero avvenire durante l'integrazione e correggerli, l'ultimo stadio della procedura consiste nell'applicazione di un passo di accettazione *Metropolis* (Metropolis et al., 1953; Hastings, 1970), dove la probabilità di accettazione di ogni passo è (ρ^*, θ^*) generata dalla transizione a partire da (ρ, θ) quindi

$$\min(1, \exp(H(\rho, \theta) - H(\rho^*, \theta^*))) \quad (2.25)$$

sulla base di questa probabilità si decide se accettare la nuova proposta oppure conservare lo stato di partenza. Se la proposta non viene accettata, il valore del parametro precedente torna alla precedente estrazione e viene usato per un'altra iterazione.

2.4.4 Nuts

I metodi di campionamento implementati in Stan comprendono l'algoritmo HMC base (o statico) e una sua forma adattiva chiamata NUTS (No-U-Turn Sampler). In particolare, il NUTS determina un appropriato numero di *L step* del *Leapfrog* per ciascuna iterazione attraverso un sofisticato algoritmo ricorsivo ad albero binario bilanciato, usato per costruire un insieme di probabili punti candidati che attraverso un ampio spettro della distribuzione target, fermandosi automaticamente quando le direzioni della traiettoria comincia a ritornare sui propri passi. La procedura precedentemente illustrata subisce alcune modifiche. Tuttavia, in questo modo la variante NUTS ha una performance pari a quella di un algoritmo HMC standard ben regolato, talvolta raggiungendo una maggiore efficienza.

Tuttavia, le tecniche HMC e NUTS sono simili agli altri algoritmi per un importante aspetto: la validità dell'inferenza è condizionata alla convergenza della catena (o delle catene) alla distribuzione target. Le diagnostiche utilizzate nelle per l'analisi della convergenza sono le medesime dei comuni metodi MCMC ([Gelman & Rubin, 1992](#)).

Capitolo 3

CASO STUDIO

3.1 TEORIA DELL'ATTACCAMENTO NELLA MEDIA INFANZIA E PRIMA ADOLESCENZA

La teoria dell'attaccamento di Bowlby è una delle teorie più consolidate per descrivere la relazione tra genitori e figli (Mikulincer et al., 2003). Uno stile di attaccamento può essere definito come un pattern di aspettative relazionali, emozioni e comportamenti. Uno stile di attaccamento si instaura dalle primissime esperienze con i *caregivers* e influenza i comportamenti interpersonali e lo sviluppo durante tutto l'arco della vita di una persona (Fraley & Shaver, 2000; Shaver & Mikulincer, 2002). La qualità dell'attaccamento nei primi periodi di vita è considerato essere un fattore determinante per lo sviluppo psicosociale (Greenberg, 1999). Le primissime ricerche su tale costrutto hanno identificato tre principali tipi di attaccamento: sicuro, ansioso ed evitante (Ainsworth et al., 1978; Bartholomew & Horowitz, 1991; Shaver & Hazan, 1987). Un attaccamento sicuro è di grande protezione per lo sviluppo socio-emotivo dei bambini offrendo significative capacità di adattamento durante i periodi della media infanzia e dell'adolescenza (Brenning et al., 2014; Kerns & Richardson, 2008). L'attaccamento ansioso si riferisce alla preoccupazione per il supporto sociale, gelosia oppure paura di abbandono o rifiuto, mentre l'evitamento è legato al rifiuto dell'intimità con il *caregiver*, il disagio da vicinanza oppure l'autosufficienza. L'ansia da attaccamento sarebbe principalmente associata con strategie iperattive di regolazione emotiva. Un esempio di tali strategie è il continuo monitoraggio dell'ambiente per osservare la disponibilità della figura di attaccamento (Mikulincer & Shaver, 2007). Al contrario, un attaccamento evitante è legato all'uso di strategie deattivi di regolazione delle emozioni. La disattivazione consiste nella soppressione di emozioni mascherando espressioni di emozioni. Il recente sviluppo della *Experiences in Close Relationships Scale-Revised Child* (ECR-RC) è risultato un utile strumento per la valutazione dell'attaccamento ansioso ed evitante nei bambini e negli adolescenti. L'attaccamento insicuro è stato riconosciuto come un fattore di rischio per lo sviluppo socio-emotivo lungo il corso della vita. Evidenze empiriche hanno dimostrato che un attaccamento insicuro durante l'infanzia predice future difficoltà nella regolazione delle emozioni e futuri problemi di comportamento (Groh et al., 2012). Similmente è stato osservato in campioni di adulti e adolescenti che questi due tipi di attaccamenti sono la causa di numerosi disturbi mentali e/o di personalità (Mikulincer & Shaver, 2012). La disattivazione dei processi di regolazione delle emozioni associati ad attaccamenti ansiosi ed evitanti aumenterebbe la vulnerabilità a psicopatologie e sentimenti depressivi. Ricerche sull'attaccamento sono state condotte soprattutto durante l'infanzia (fanciullezza), prima infanzia, oppure nei periodi della tarda adolescenza ed età adulta. Ci sono poche evidenze riguarda a come l'attaccamento influenzi la media infanzia (periodo com-

preso tra i 6 ed i 10 anni) e la prima adolescenza (periodo compreso tra gli 11 e i 14 anni; (Eccles, 1999), poiché i bambini mostrano un miglioramento nel pensiero astratto, flessibilità cognitiva e capacità meta-cognitive, come per esempio regolazione emozionale (Raikes & Thompson, 2005). Per questa ragione, le loro rappresentazioni di attaccamento cominciano a diventare più elaborate ed organizzate (Brumariu et al., 2018). I bambini in questi periodi della loro vita registrano un aumento del numero dei ruoli sociali e cominciano a spendere più tempo con i propri coetanei (Fraley & Davis, 1997). Rispetto alla prima infanzia, gli individui che affrontano il periodo della media infanzia e della prima adolescenza fanno meno affidamento ai genitori per il supporto emozionale e utilizzano le proprie figure di attaccamento come base sicura per esplorare l'ambiente interpersonale al di fuori dei confini familiari. Inoltre, nella prima infanzia è fondamentale la vicinanza fisica, mentre nei periodi seguenti è molto più importante la disponibilità psicologica (Bowlby, 1969; Kerns et al., 2000). È stato documentato come nelle relazioni di attaccamento ci sia una certa continuità durante l'intero corso della vita. Bowlby abbraccia una visione di questo tipo, argomentando che l'attaccamento formatosi durante la prima infanzia all'interno del nucleo familiare è abbastanza stabile fino all'età adulta.

3.2 MISURAZIONE DELL'ATTACCAMENTO NELLA MEDIA INFANZIA E PRIMA ADOLESCENZA

Nonostante siano state sviluppate numerose misure per valutare l'attaccamento nella media infanzia e prima adolescenza, esiste una certa scarsità di adeguati strumenti per misurare l'attaccamento ansioso ed evitante (Dwyer, 2005). Le misure più significative per valutare la sicurezza/insicurezza dell'attaccamento nella media infanzia e prima adolescenza sono:

- Attachment Security Scale (ASS; Kerns et al., 1996)
- Relationship Questionnaire (RQ; Bartholomew & Horowitz, 1991)
- Preoccupied and Avoidance Coping Questionnaire (PACQ; Finnegan et al., 1996).

L'ASS valuta la percezione di sicurezza nella specifica relazione tra genitore e figlio. Tuttavia, il questionario offre esclusivamente una valutazione unidimensionale dell'attaccamento senza distinguere tra dimensioni d'ansia e di attaccamento. L'RQ viene usato per lo studio dei vari stili di attaccamento nella medio/tarda infanzia; un rilevante limite del questionario è che è caratterizzato da risposte a singoli items, per cui la consistenza interna del punteggio interno non può essere determinata. Il PACQ individua i bambini preoccupati (coloro che dimostrano un'eccessiva dipendenza alla figura di attaccamento) ed evitanti (coloro che negano l'angoscia e l'affetto legati alla figura di attaccamento). Un problema di questo strumento è che gli items hanno un contenuto specifico per ogni età (Karavasilis et al., 2003; Kerns et al., 2000), per cui non può essere utilizzato con gli adolescenti. Molti limiti citati possono però essere risolti e superati dall'ECR-R (Fraley et al., 2000).

3.2.1 *Experiences in Close Relationships* (ECR)

L'ECR fu originariamente sviluppata da (Brennan et al., 1998) sulla base di un'analisi fattoriale su larga scala di praticamente tutte le misure di attaccamento romantico adulto auto-riportate. Un'analisi delle principali componenti di più di 60 sotto-scale ha prodotto 2 principali fattori che possono essere identificati come attaccamento ansioso ed evitante. In seguito, furono costruite due scale da 18 item dalla selezione di quelli che si legavano di più con questi due fattori. (Fraley et al., 2000) hanno sviluppato l'ECR-R per migliorare le proprietà psicometriche dell'ECR. L'ECR-R

è una delle misure auto-riportate più frequentemente usate per valutare l'attaccamento romantico nell'età adulta (Sibley et al., 2005). La scala fu recentemente adattata per la misurazione dell'attaccamento ansioso ed evitante nei bambini e negli adolescenti, per cui oggi è disponibile una versione lunga e una corta della scala *Experiences in Close Relationships-Revised Child* (ECR-RC; Brenning et al., 2014). La versione più lunga è caratterizzata da 36 items provenienti dall'originale ECR, essendo composta per gli adulti, ogni domanda è classificata attraverso una scala Likert composta da 7 punti, da 1 ("fortemente in disaccordo") a 7 ("fortemente d'accordo"). Più recentemente, è stata proposta una versione più corta della scala. ECR-RC include 12 items (i medesimi per padre e madre) selezionati dalla versione originale, all'interno del quale 6 si riferiscono all'ansia e altri sei misurano la dimensione legata all'evitamento. Anche in questo caso, ogni domanda è classificata su una scala Likert che va da 1 ("fortemente in disaccordo") a 7 ("fortemente d'accordo"). Un recente studio condotto su 961 adolescenti italiani di età compresa tra i 12 e i 19 anni (Lionetti et al., 2018) ha proposto un terzo fattore etichettato come "Sicurezza", che include tre dei sei items originariamente relativi all'evitamento (per esempio "spesso parlo con mia madre/padre riguardo a problemi e preoccupazioni"; "quando mi sento male, parlare con mia madre/padre mi aiuta"; "dico a mia madre/padre praticamente tutto"). Un modello a tre fattori ha prodotto un miglior adattamento rispetto al modello a due fattori. È possibile concludere che l'ECR-RC è un utile strumento per valutare l'attaccamento ansioso ed evitante in bambini ed adolescenti. Tuttavia, evidenze empiriche rispetto alla struttura fattoriale sono ancora scarse.

3.2.2 Limiti ECR-RC

Lo studio dell'attaccamento nella media infanzia è un campo di ricerca relativamente nuovo. Nonostante siano stati compiuti dei miglioramenti, esistono ancora visioni divergenti rispetto alla sua misurazione. In questo lavoro è stata utilizzata una forma ridotta dell'ECR-RC utilizzato per valutare le dimensioni di ansia ed evitamento attraverso l'esaminazione del rapporto tra genitore e figlio. Per rendere la scala di misura maggiormente comprensibile ai soggetti le opzioni di risposta sono state ridotte da 7 a 5 (Brenning et al., 2014). Analisi fattoriali esplorative e confermate hanno individuato due principali fattori, ovvero l'attaccamento ansioso e l'attaccamento evitante, che risultano altamente correlati per esempio in Jan Conradi et al., 2006. Come riportato da Fraley et al., 2011 una distinzione concettuale tra costrutti non implica un'indipendenza statistica tra loro. Dunque, in alcune situazioni si potrebbe osservare un'inter-correlazione tra dimensioni di evitamento e di ansia all'interno del sistema di attaccamento (Fraley et al., 2000). In questa prospettiva, per esempio, l'evitamento dell'intimità potrebbe essere una conseguenza dell'ansia e dunque le due dimensioni potrebbero essere inter-correlate tra loro. È possibile osservare alcune limitazioni, in primo luogo la replicabilità dello studio in altre culture, i risultati sono infatti difficilmente generalizzabili ad altri contesti poiché il nostro campione è stato estratto da una popolazione proveniente da una specifica regione di uno specifico stato. Secondo, l'esame dell'affidabilità del *test-retest* dei punteggi della breve scala ECR-RC si rivelerà utile nel determinare la stabilità della scala. Infine, quest'analisi è limitata dall'affidabilità che hanno le misure *self-report* per testare la validità concorrente e convergente. Dunque, ricerche future, dovrebbero includere altri metodi di valutazione e fonti di informazione per la definizione della validità dell'ECR-RC (Marci et al., 2019).

3.3 MATERIALI E METODI

3.3.1 Partecipanti

Lo studio venne presentato a 520 bambini di età compresa tra gli 8 ed i 13 anni provenienti da cinque scuole elementari e tre scuole medie. Le famiglie di 492 bambini acconsentirono alla

ricerca, quindi il 94.6% del campione totale (26 bambini furono assenti il giorno della raccolta dati). Inoltre, bambini con disabilità e disturbi dell'intelletto non vennero coinvolti nello studio (3.4%, $N = 18$). Il campione finale era composto da 448 partecipanti, dei quali 259 provenienti da scuole elementari (51% femmine, età media = 9 anni e 2 mesi, $SD = 7$ mesi, range = 8.2 – 10.3) e 189 da scuole medie; per l'analisi che seguirà, prenderemo in considerazione solamente il gruppo di bambini delle scuole elementari.

3.4 ANALISI

Tutte le analisi sono state svolte attraverso il linguaggio R e Stan.

```
# Set environment -----
rm(list=ls()); graphics.off()
setwd("C:\\Users\\ricci\\OneDrive\\Desktop\\")
library(doParallel); library(parallel); library(RcppParallel)

# Load data -----
load("data_marci.rda")
datax = scale(D[complete.cases(D),], center = TRUE, scale = TRUE)
str(datax)
L_structureE=data.frame(c(rep(1,6),rep(0,6)),
                       c(rep(0,6),rep(1,6)));
colnames(L_structureE) = c("eta1", "eta2")
```

La funzione `scale` permette di calcolare i valori standardizzati, covertendo ogni valore originale in un z-score. Inoltre, si definisce la matrice dei coefficienti del modello fattoriale (Λ), che presenta una struttura semplice, dove ciascuna variabile latente è associata ad un solo gruppo di variabili manifeste.

```
stan_data = list(I=NROW(datax), J=NCOL(datax), K=2, beta0=1.25, beta1=1.25,
                weib0=1.25, weib1=2.0, Y=datax, L_structureE=L_structureE)
## Signal + Noise model
out = readRDS(file = "EsempioSTAN.rds") #load the compiled stan model
stan_fit = rstan::sampling(object = out, data = stan_data,
                           iter = 8000, warmup = 4000, chains = 4, cores = 4,
                           control=list(adapt_delta=0.9), algorithm="NUTS")

## Noise model
out = readRDS(file = "EsempioSTANnull.rds") #load the compiled stan model
stan_fit_null = rstan::sampling(object = out, data = stan_data,
                                iter = 8000, warmup = 4000, chains = 4, cores = 4,
                                control=list(adapt_delta=0.9), algorithm="NUTS")

save(stan_fit, stan_fit_null, file = "case_study_output.rds")
```

Stan richiede che i dati vengano passati come una lista i cui elementi siano le variabili definite nel blocco di dati. Per questo codice viene creata una lista in cui viene definito il numero di osservazioni (I), il numero di variabili manifesto (J), il numero di variabili latenti (K), la struttura della matrice dei coefficienti del modello fattoriale ($L_structureE$) e il dataframe standardizzato (Y).

In seguito, viene utilizzata la funzione di Stan per estrarre campioni dalla distribuzione a posteriori che è stata dichiarata nel modello. Le prime funzioni per il campionamento includono i dati, i valori iniziali e le opzioni del campionatore come per esempio *chains*, *iter* e *warmup*. In particolare, quest'ultima funzione indica il numero di iterazioni che sono svolte dall'algoritmo NUTS per la fase di adattamento prima che inizi il vero e proprio campionamento. In seguito al *warmup*, il campionatore conclude l'adattamento e continua finché il numero totale di iterazioni non viene completato. Non c'è alcuna sicurezza che le estrazioni ottenute durante il *warmup* provengano da una distribuzione a posteriori, per questa ragione la funzione dovrebbe essere usata solamente per motivi diagnostici e non inferenziali.

```
## Extract posterior quantities
print(x=stan_fit,pars = c("csi", "Lambda_current", "theta_y", "PHI"))
print(x=stan_fit_null,pars = c("theta_y", "MU"))

rstan::stan_diag(object = stan_fit); rstan::check_hmc_diagnostics(stan_fit)
```

Le statistiche di sintesi per i parametri mostrate dal *print* sono calcolate usando solamente estrazioni post-warmup.

La modalità diagnostica di un programma Stan consiste nell'inizializzazione dei parametri in modo casuale oppure con valori iniziali specificati dall'utente, in seguito valuta la *log probability* e i suoi gradienti. La modalità diagnostica restituisce la *log posterior density* calcolata dal programma Stan per il valore iniziale specificato.

Gli algoritmi utilizzati per questa simulazione (HMC e NUTS) simulano la traiettoria di una particella fittizia che rappresenta i valori del parametro quando è soggetta ad un potenziale energia, il cui valore in un punto è rappresentato dalla *log posterior density*. Il *momentum* casuale è impartito indipendentemente in ogni direzione dall'estrazione proveniente da una distribuzione normale. L'Hamiltoniano viene definito come la somma dell'energia potenziale e cinetica del sistema.

In Stan viene utilizzato l'algoritmo *Leapfrog* per simulare il cammino di una particella lungo una traiettoria definita dall'iniziale *momentum* casuale e dal potenziale campo energetico.

Una divergenza si verifica nel momento in cui la traiettoria Hamiltoniana simulata si discosta dal valore di partenza. Quando ciò accade la simulazione di dati non è credibile.

```
# Compare both models via Bayes Factor -----
loglik_current = bridgesampling::bridge_sampler(stan_fit,silent=TRUE,
                                               method="warp3",maxiter=2500)
print(loglik_current$logml)
loglik_null = bridgesampling::bridge_sampler(stan_fit_null,silent=TRUE,
                                             method="warp3",maxiter=2500)
print(loglik_null$logml)

BF_value = bridgesampling::bf(loglik_current, loglik_null,log = TRUE)
print(BF_value) #244.69945

sqrt(log(2*BF_value$bf)) #2.48861
```

A questo punto si confrontano i due diversi modelli per osservare quale dei due riesce a catturare i processi che generano i dati. Per il calcolo della log-verosimiglianza e del fattore Bayesiano viene utilizzato il pacchetto "bridgesampling". Quest'ultima quantità è in grado di confrontare

il modello con il segnale e il modello solo rumore asserendo che il secondo è statisticamente sfavorevole rispetto al primo.

```
# Some plots of posteriors -----
library(rstan)
x11();traceplot(stan_fit, pars = c("csi"), inc_warmup = TRUE, nrow = 2)
x11();traceplot(stan_fit, pars = c("Lambda_current"), inc_warmup = TRUE, nrow = 2)
x11();traceplot(stan_fit, pars = c("theta_y"), inc_warmup = TRUE, nrow = 2)
x11();traceplot(stan_fit, pars = c("PHI"), inc_warmup = TRUE, nrow = 2)

x11();rstan::stan_plot(stan_fit,pars = "csi")
x11();rstan::stan_plot(stan_fit,pars = "Lambda_current")
```

3.4.1 Risultati

Parameter	Mean	sd
ξ	0.89	0.06
$1 - \xi$	0.11	0.06

Tabella 3.1: $\xi \sim \mathcal{B}(n; p)$

dove p è uguale a 0.89 e rappresenta la distribuzione di probabilità che il dato derivi dal modello segnale e rumore. Ogni osservazione contiene una parte di segnale (con probabilità ξ) e una parte di errore (con probabilità $1 - \xi$), per cui l'11% delle unità statistiche non risponde al modello CFA a 2 fattori utilizzato nella scala ECR-RC.

Il modello proposto introduce due variabili latenti, ovvero Ansia ed Evitamento, quindi la variabilità osservata (matrice di covarianza Λ) è spiegata da due fattori latenti che governano tale varianza e covarianza.

Vengono presentate le quantità a posteriori per il modello segnale e rumore:

$$\Lambda_{est} = \begin{pmatrix} 0.60 & 0 \\ 0.68 & 0 \\ 0.74 & 0 \\ 0.70 & 0 \\ 0.60 & 0 \\ 0.58 & 0 \\ 0 & 0.55 \\ 0 & 0.55 \\ 0 & 0.19 \\ 0 & 0.82 \\ 0 & 0.76 \\ 0 & 0.45 \end{pmatrix} \quad Sd(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0.08 & 0 \\ 0.08 & 0 \\ 0.08 & 0 \\ 0.08 & 0 \\ 0.08 & 0 \\ 0 & 0.08 \\ 0 & 0.08 \\ 0 & 0.08 \\ 0 & 0.07 \\ 0 & 0.07 \\ 0 & 0.08 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Non sono presenti *cross loadings* (ciasun item è legato ad una sola variabile latente). Il modello non presenta dei coefficienti fattoriali elevati, per cui i costrutti latenti non sono completamente in grado di spiegare la variabilità osservata degli indicatori, per esempio l'item 9 e l'item 12 presentano punteggi fattoriali molto bassi e hanno un'alta variabilità d'errore (vedi matrice di varianza/covarianza degli errori Θ_δ). È possibile perciò affermare che la seconda variabile latente non è in grado di catturare la variabilità osservata da questi due item.

parameter	mean	sd
δ_1	0.83	0.05
δ_2	0.78	0.04
δ_3	0.73	0.05
δ_4	0.77	0.05
δ_5	0.84	0.05
δ_6	0.85	0.04
δ_7	0.86	0.05
δ_8	0.87	0.05
δ_9	0.96	0.03
δ_{10}	0.65	0.05
δ_{11}	0.71	0.05
δ_{12}	0.91	0.04

Tabella 3.2: Diagonale della matrice delle varianze/covarianze degli errori del modello segnale e rumore

$$\Phi_{est} = \begin{pmatrix} 1 & 0.27 \\ 0.27 & 1 \end{pmatrix} Sd(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0.08 \\ 0.08 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

La matrice Φ è una matrice 2×2 dove vengono presentate le covarianze tra le variabili latenti. Le variabili latenti hanno basse correlazioni tra loro per cui si può dire che misurare l'attaccamento sia indipendente dal misurare l'evitamento. Da un punto di vista metodologico questo strumento è in grado di separare le due variabili.

parameter	mean	sd
δ_1	0.96	0.03
δ_2	0.97	0.03
δ_3	0.96	0.03
δ_4	0.96	0.03
δ_5	0.97	0.03
δ_6	0.96	0.03
δ_7	0.97	0.05
δ_8	0.97	0.03
δ_9	0.97	0.03
δ_{10}	0.97	0.03
δ_{11}	0.96	0.03
δ_{12}	0.96	0.03

Tabella 3.3: Diagonale della matrice delle varianze/covarianze degli errori del modello solo rumore

mentre il modello con solo rumore presenta valori del parametro $\boldsymbol{\mu}$ nulli e valori della matrice $\boldsymbol{\Theta}_\delta$ molto elevati.

Dopo aver stimato il modello è necessario determinare se esso si adatti bene ai dati. Si potrebbe anche essere interessati a confrontare due diversi modelli, come in questo caso. L'approccio Bayesiano è molto flessibile per il confronto e si fonda sul calcolo del *Bayes Factor*. In questo caso ci troviamo dinanzi a due modelli:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_i &\sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^\top + \boldsymbol{\Theta}_\delta^{(1)}) \\ \mathbf{y}_i &= \boldsymbol{\Lambda}_{J \times K}\boldsymbol{\eta}_{K \times 1} + \delta_{J \times 1}\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_i &\sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Theta}_\delta^{(2)}) \\ \mathbf{y}_i &= \delta_{J \times 1}\end{aligned}\tag{3.4}$$

ed è necessario valutare attraverso il *Bayes Factor* quantificare il supporto per un modello rispetto all'altro. Il *Bayes Factor* viene definito come il rapporto di verosimiglianza di una particolare ipotesi rispetto alla verosimiglianza di un'altra ipotesi.

<i>Bayes Factor</i>	<i>Signal-to-noise ratio</i>
244.69945	2.48861

In questo caso, i risultati della nostra analisi mostrano una forte evidenza a supporto dell'ipotesi alternativa, ovvero che il primo modello è più fortemente supportato dai dati rispetto al secondo modello per minimizzare la perdita di informazioni. Vista la decisiva evidenza a supporto del modello segnale e rumore si può escludere il modello composto da "solo rumore".

Il *Signal-to noise ratio* (SNR), nonchè il rapporto che confronta il livello di segnale misurato rispetto al rumore di fondo. In accordo con i valori ottenuti è possibile asserire che viene misurata una quantità di segnale 2.48861 volte superiore rispetto a quella del rumore. In accordo con il *Rose criterion*, il quale afferma che è necessario un SNR con valore uguale o superiore a 5 per essere in grado di distinguere le caratteristiche di un'immagine con certezza ([Tisseur et al., 2016](#)), è possibile affermare che viene misurata una quantità di segnale superiore del 50% rispetto alla quantità di rumore di fondo.

A questo punto vengono tracciati dei *trace plots* (vedi Figura 3.1 - Figura 3.6) rispetto ai parametri che sono stati stimati, fornendo una modalità visiva per ispezionare il comportamento di campionamento e valutare come si comportano le catene di Markov e la convergenza. Se il modello presenta convergenza, il grafico dovrebbe mostrare una certa dispersione casuale intorno al valore della media, inoltre se le catene "serpeggiano" intorno al valore medio significa che la stima dei valori presenta un problema. In questo caso abbiamo una situazione di convergenza poichè i valori di \hat{R} hanno valore uguale a 1.

Gli ultimi grafici (vedi Figura 3.7 - Figura 3.10) mostrano gli intervalli di incertezza a posteriori fissati all'80% e al 95% rispettivamente per quelli esterni e per quelli interni. Inoltre viene indicata la media per tutti i parametri stimati (*log posterior density function*).

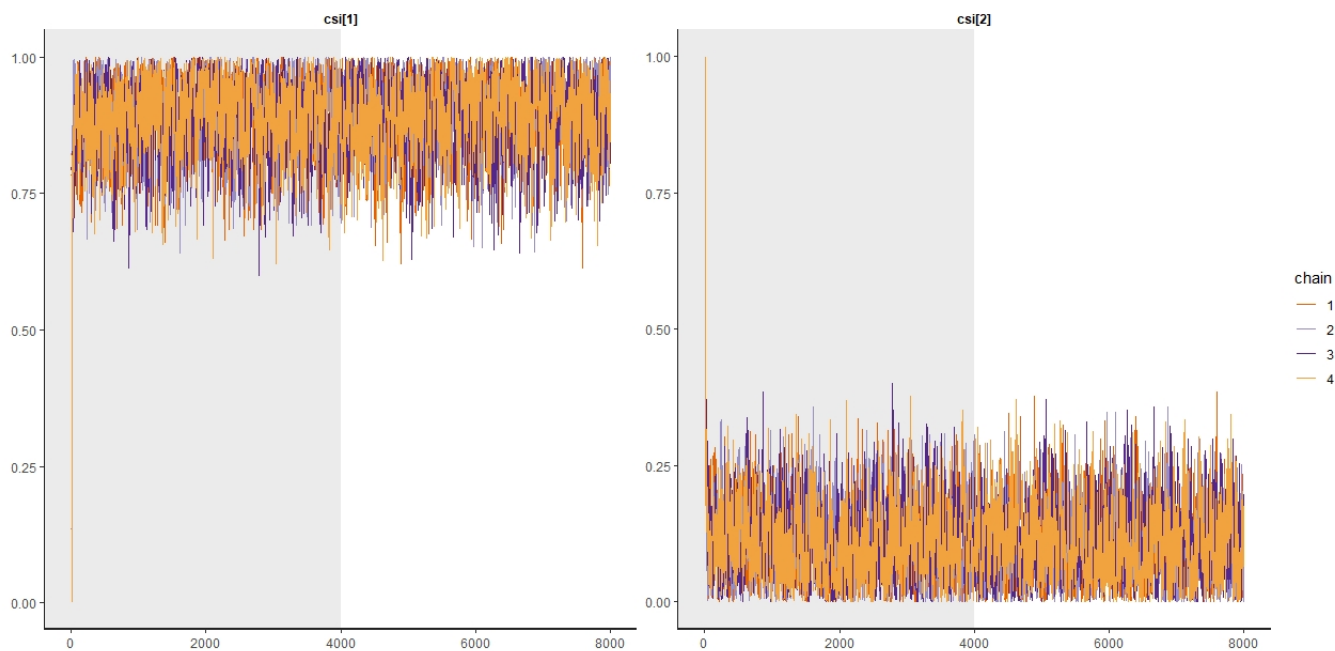


Figura 3.1: *trace plots* del parametro ξ

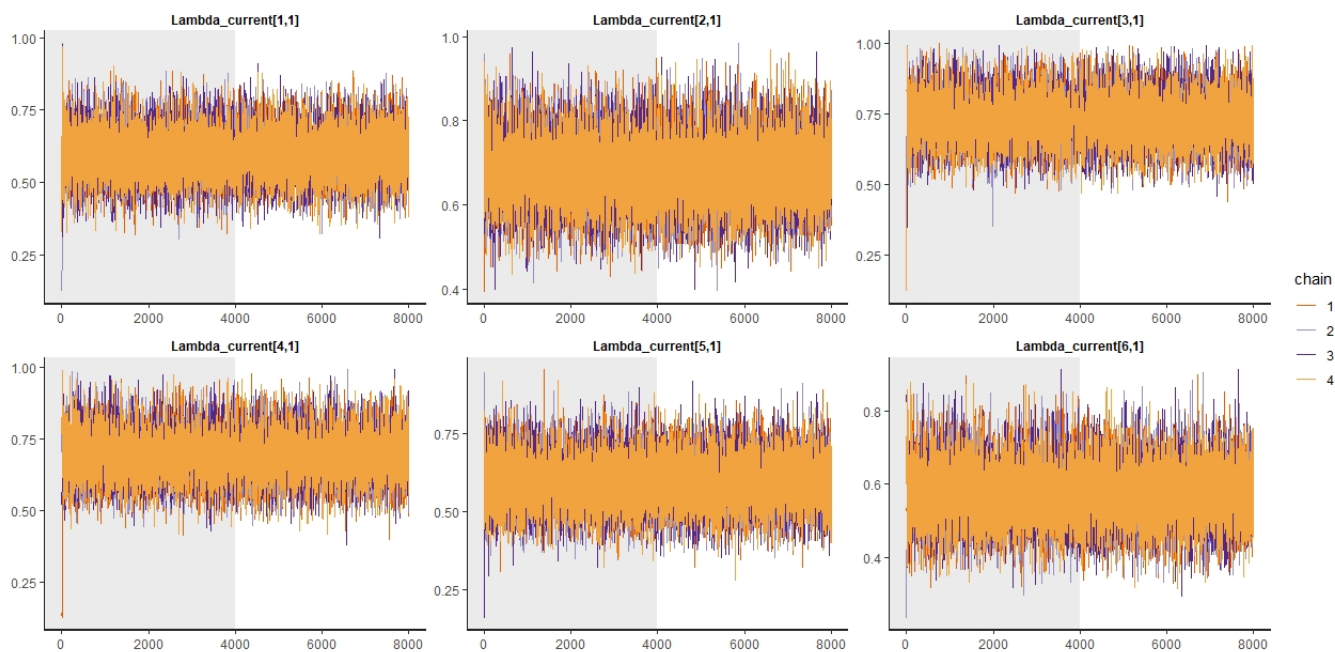


Figura 3.2: *trace plots* del parametro Λ per il primo fattore

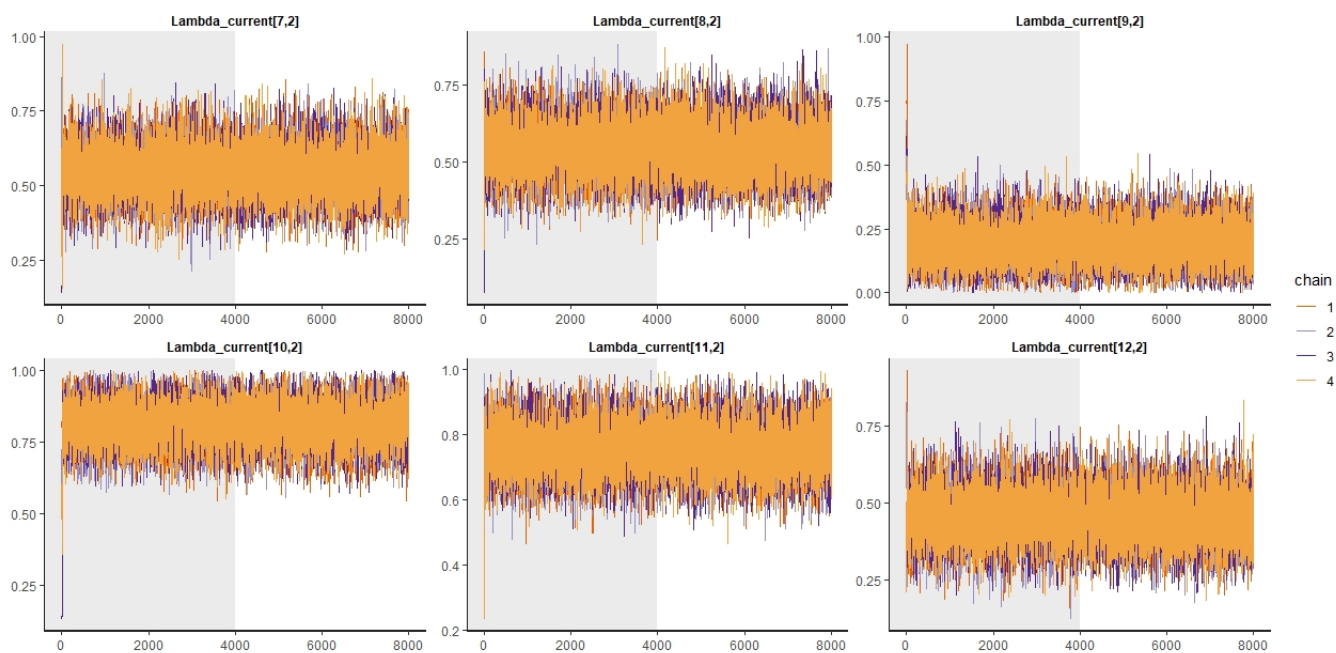


Figura 3.3: *trace plots* del parametro Λ per il secondo fattore

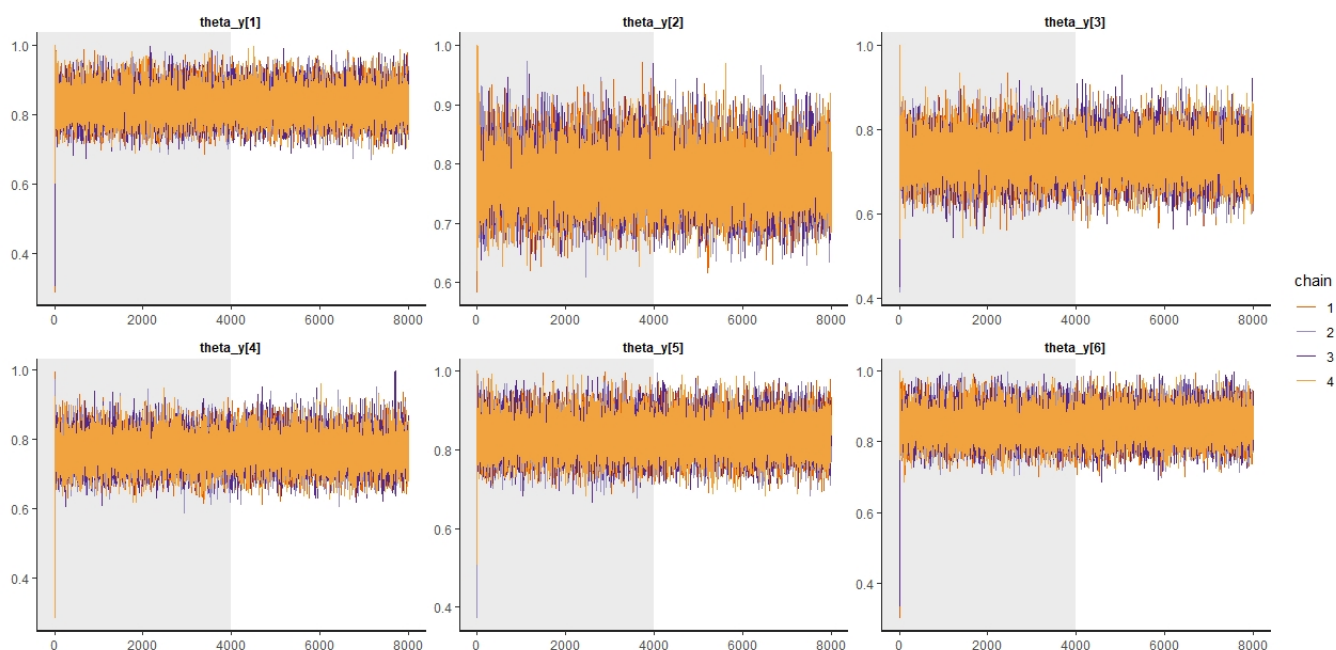


Figura 3.4: *trace plots* della diagonale della matrice delle varianze/covarianze degli errori del modello segnale e rumore per il primo fattore

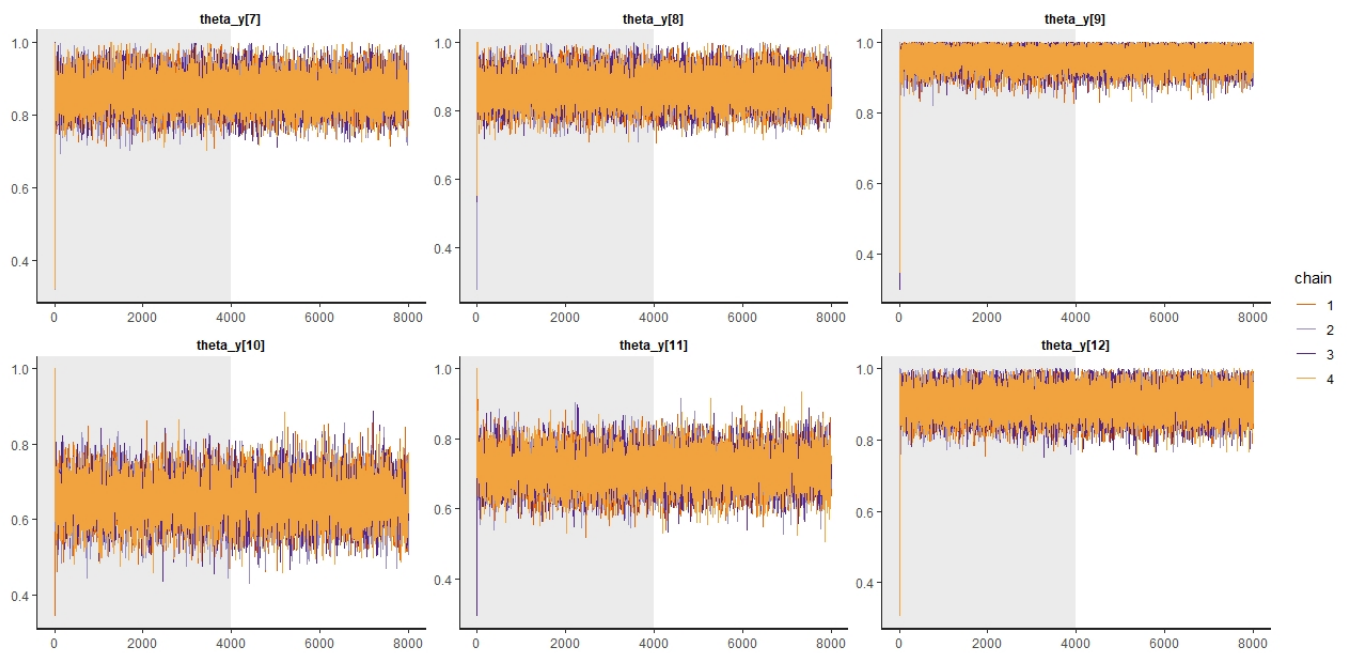


Figura 3.5: *trace plots* della diagonale della matrice delle varianze/covarianze degli errori del modello segnale e rumore per il secondo fattore

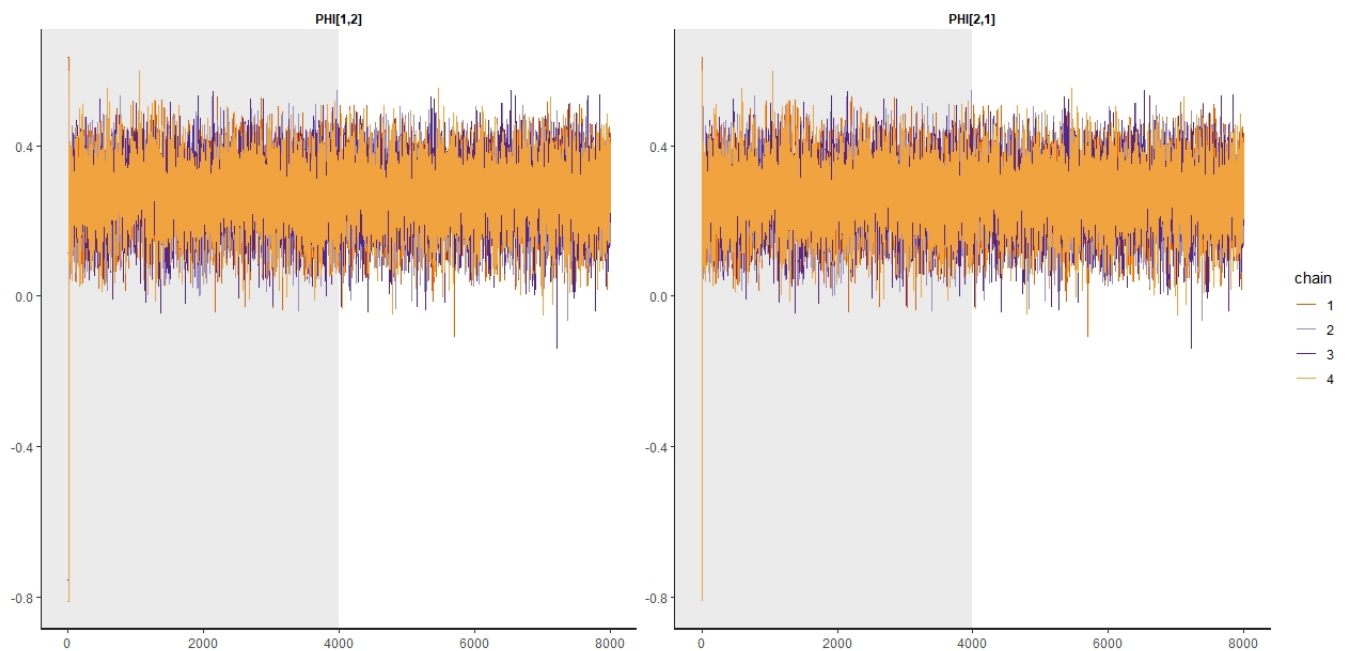


Figura 3.6: *trace plots* del parametro Φ

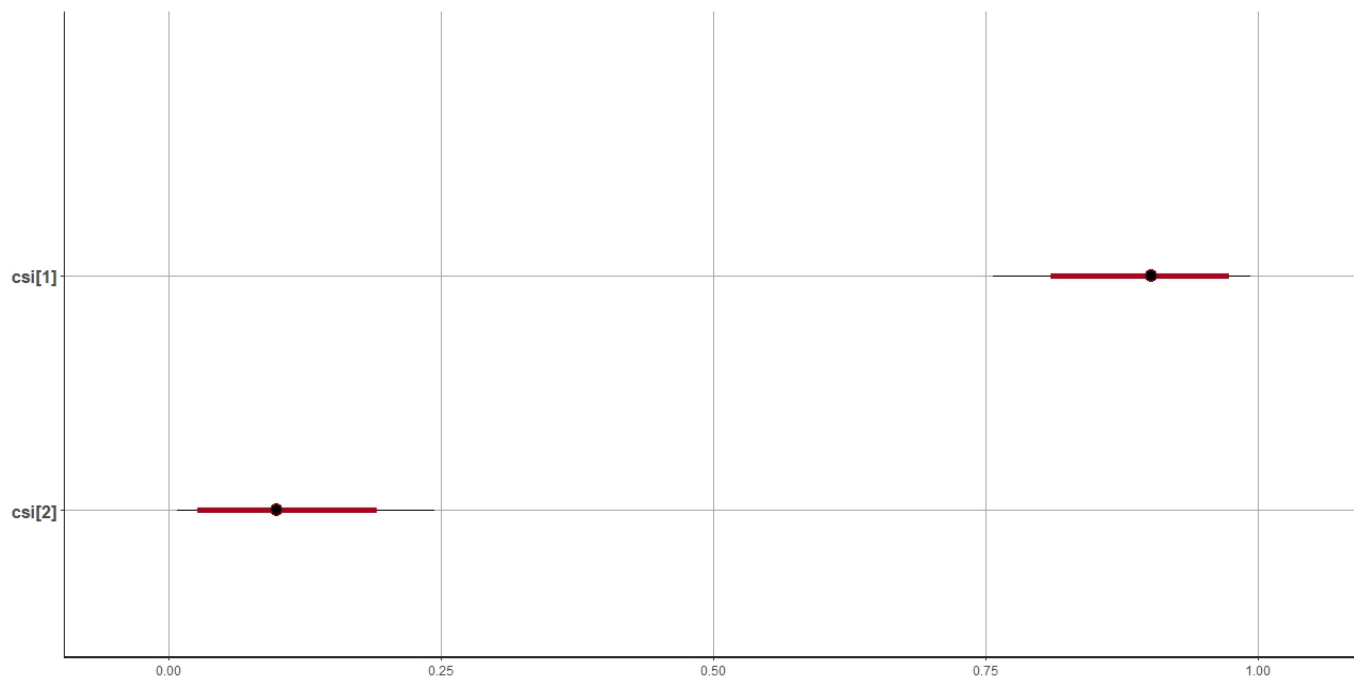


Figura 3.7: Medie ed intervalli di incertezza per ξ

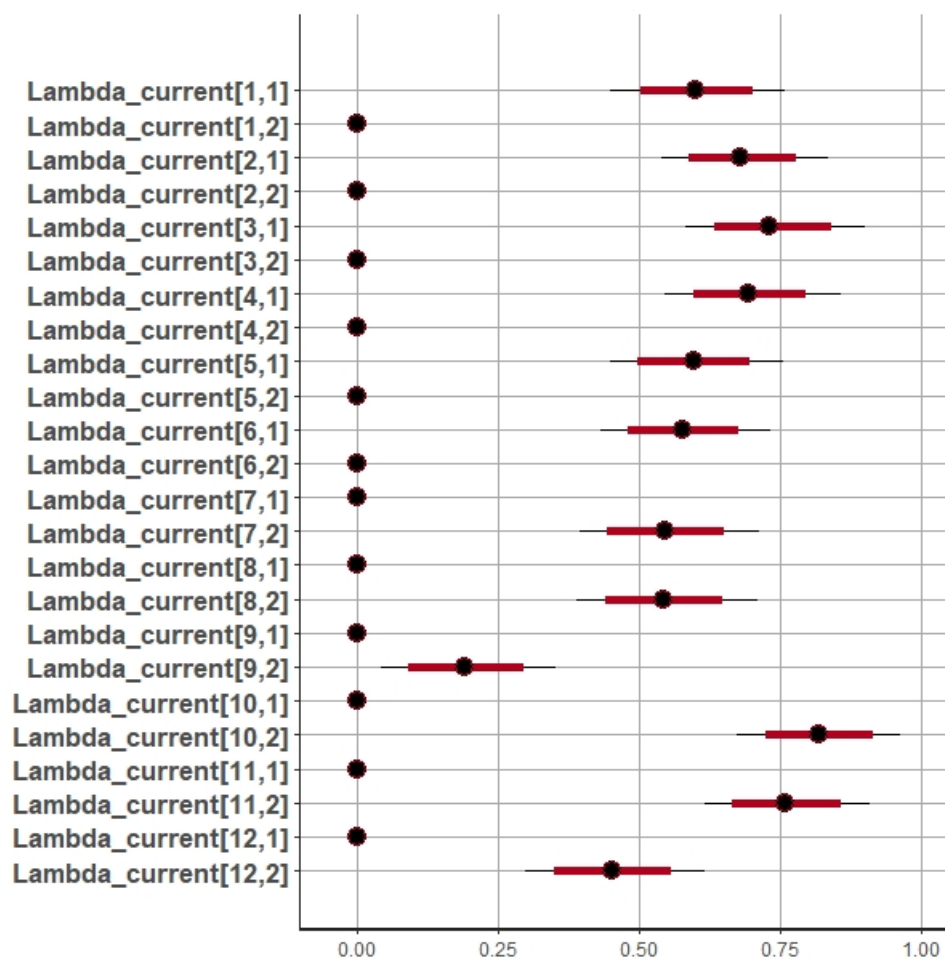


Figura 3.8: Medie ed intervalli di incertezza per la matrice dei coefficienti fattoriali

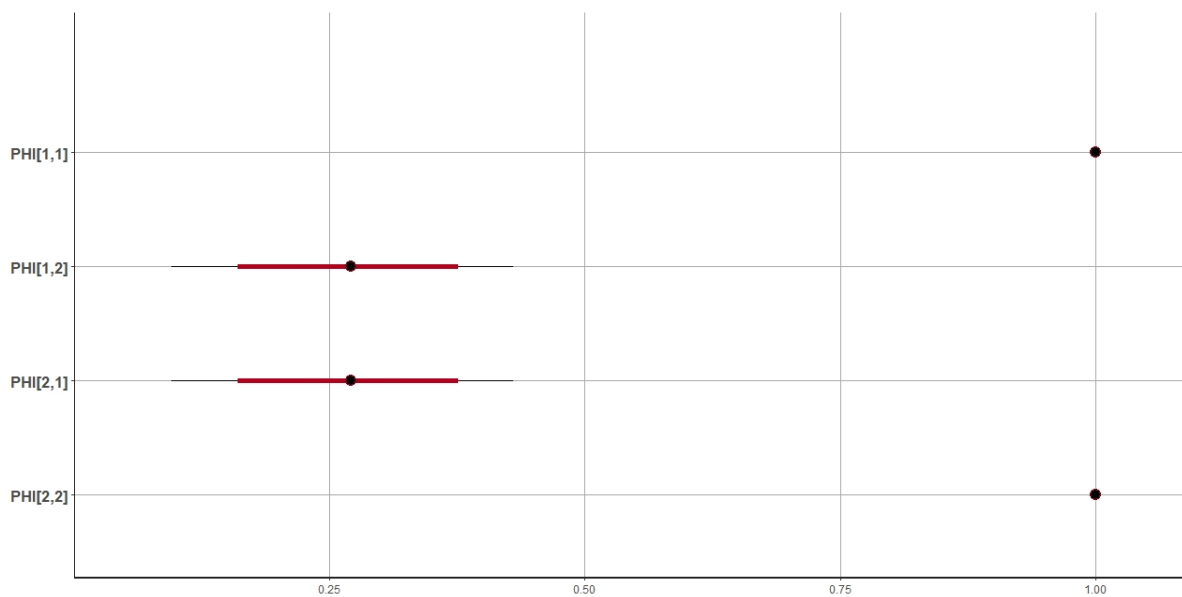


Figura 3.9: Medie ed intervalli di incertezza per la matrice delle varianze/covarianze tra fattori latenti

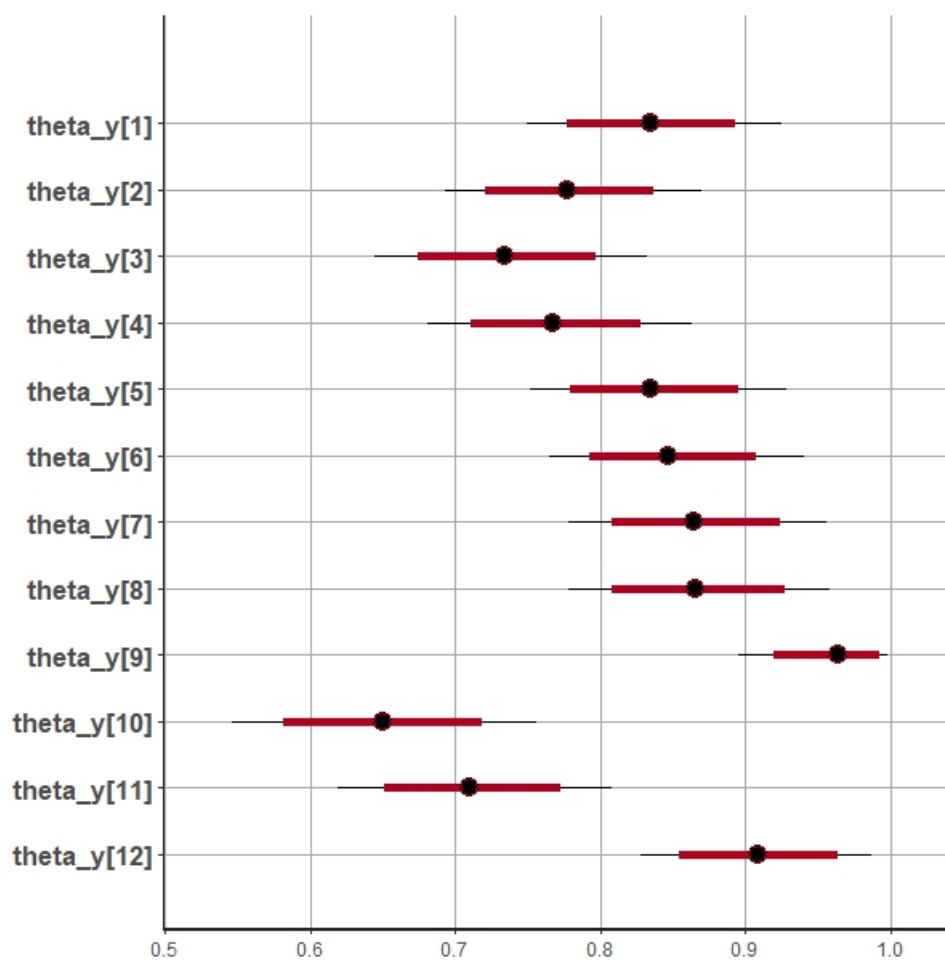


Figura 3.10: Medie ed intervalli di incertezza per la matrice delle varianze/covarianze degli errori del modello

Appendice A

```
#EsempioSTAN.stan
data {
  int I; //259 numero di osservazioni
  int J; //12 numero di variabili manifesto
  int K; //2 numero di variabili latenti
  matrix[I,J] Y; //dataframe standardizzato (datax)
  matrix[J,K] L_structureE; // struttura della matrice dei coefficienti
  del modello fattoriale (factor loadings)
}

parameters{
  matrix<lower=0,upper=1>[J,K] Lambda;
  matrix[I,K] ETA;
  corr_matrix[K] PHI;
  vector<lower=1e-9,upper=1>[J] theta_y;
  simplex[2] csi;

transformed parameters{
  vector[J] alpha;
  vector[K] M;
  vector<lower=1e-9>[K] Sd_d;
  matrix[I,J] MU;
  matrix[K,K] Ld;
  matrix[J,K] Lambda_current;

  Lambda_current = Lambda .* L_structureE;

  M = rep_vector(0,K);
  Sd_d = rep_vector(1,K);
  alpha = rep_vector(0,J);

  Ld = diag_matrix(Sd_d) * cholesky_decompose(PHI);

  for(i in 1:I){
    MU[i] = (alpha + Lambda_current * ETA[i]')';
  }
}
```

```

model{for(i in 1:I){
  vector[2] lps = log(csi);

  ETA[i] ~ multi_normal_cholesky(M,Ld);
  lps[1] += normal_lpdf(Y[i] | MU[i], theta_y); //signal
  lps[2] += normal_lpdf(Y[i] | rep_vector(0,J), theta_y); //noise
  target += log_sum_exp(lps);
};
}

```

```

#EsempioSTANnull.stan
data {
  int I;
  int J;
  int K;
  matrix[I,J] Y;
  matrix[J,K] L_structureE;
}

parameters{
  vector<lower=1e-9,upper=1>[J] theta_y;
}

transformed parameters{
  matrix[I,J] MU;
  for(i in 1:I){
    MU[i] = rep_row_vector(0,J);
  }
}

model{
  Y[i] ~ normal(MU[i],theta_y);
}
}

```

Bibliografia

- Ainsworth, M. D. S., Blehar, M., Waters, E., Wall, S., et al. 1978, Patterns of attachment, Hillsdale, nj: erlbaum [19](#)
- Bartholomew, K., & Horowitz, L. M. 1991, Journal of personality and social psychology, 61, 226 [19](#), [20](#)
- Bowlby, J. 1969, in Attachment and Loss: Volume I: Attachment (London: The Hogarth Press and the Institute of Psycho-Analysis), 1–401 [20](#)
- Brennan, K. A., Clark, C. L., & Shaver, P. R. 1998 [20](#)
- Brenning, K., Van Petegem, S., Vanhalst, J., & Soenens, B. 2014, Personality and Individual Differences, 68, 118 [19](#), [21](#)
- Brown, T. A. 2015, Confirmatory factor analysis for applied research (Guilford publications) [vi](#)
- Brumariu, L. E., Giuseppone, K. R., Kerns, K. A., et al. 2018, Attachment & Human Development, 20, 491 [20](#)
- Carroll, B. W., Ostlie, D. A., & Black, A. 2007, An introduction to modern galactic astrophysics and cosmology (Pearson Addison Wesley) [6](#)
- Coc, A., & Vangioni, E. 2017, International Journal of Modern Physics E, 26, 1741002 [4](#)
- Cutler, C., & Harms, J. 2006, Physical Review D, 73, 042001 [v](#), [8](#)
- Di Valentino, E., Mena, O., Pan, S., et al. 2021, Classical and Quantum Gravity, 38, 153001 [4](#)
- Dwyer, K. M. 2005, Human development, 48, 155 [20](#)
- Eccles, J. S. 1999, The future of children, 30 [20](#)
- Finnegan, R. A., Hodges, E. V., & Perry, D. G. 1996, Child Development, 67, 1318 [20](#)
- Fraley, R. C., & Davis, K. E. 1997, Personal relationships, 4, 131 [20](#)
- Fraley, R. C., Heffernan, M. E., Vicary, A. M., & Brumbaugh, C. C. 2011, Psychological assessment, 23, 615 [21](#)
- Fraley, R. C., & Shaver, P. R. 2000, Review of general psychology, 4, 132 [19](#)
- Fraley, R. C., Waller, N. G., & Brennan, K. A. 2000, Journal of personality and social psychology, 78, 350 [20](#), [21](#)
- Gelman, A., & Rubin, D. B. 1992, Statistical science, 7, 457 [17](#)
- Greenberg, M. T. 1999 [19](#)

- Groh, A. M., Roisman, G. I., van IJzendoorn, M. H., Bakermans-Kranenburg, M. J., & Fearon, R. P. 2012, *Child development*, 83, 591 [19](#)
- Hastings, W. K. 1970 [16](#)
- Hoshino, T. 2001, *Behaviormetrika*, 28, 37 [13](#)
- Hubble, E. 1929, *Proceedings of the national academy of sciences*, 15, 168 [7](#)
- Jan Conradi, H., Gerlsma, C., Duijn, M. v., & Jonge, P. d. 2006, *The European journal of psychiatry*, 20, 258 [21](#)
- Karavasilis, L., Doyle, A. B., & Markiewicz, D. 2003, *International Journal of Behavioral Development*, 27, 153 [20](#)
- Kerns, K. A., Klepac, L., & Cole, A. 1996, *Developmental Psychology* [20](#)
- Kerns, K. A., & Richardson, R. A. 2008, *Attachment in middle childhood* (Guilford Press New York, NY) [19](#)
- Kerns, K. A., Tomich, P. L., Aspelmeier, J. E., & Contreras, J. M. 2000, *Developmental psychology*, 36, 614 [20](#)
- Lazarsfeld, P. F., Berelson, B., & Gaudet, H. 1968, in *The People's Choice* (Columbia University Press) [13](#)
- Liddle, A. R., & Lyth, D. H. 2000, *Cosmological inflation and large-scale structure* (Cambridge university press) [1](#)
- Lionetti, F., Mastrotheodoros, S., & Palladino, B. E. 2018, *European Journal of Developmental Psychology*, 15, 452 [21](#)
- Lubke, G. H., & Muthén, B. 2005, *Psychological methods*, 10, 21 [13](#)
- Marci, T., Moscardino, U., & Altoè, G. 2019, *International Journal of Behavioral Development*, 43, 409 [21](#)
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. 1953, *The journal of chemical physics*, 21, 1087 [16](#)
- Mikulincer, M., & Shaver, P. R. 2007, *Psychological inquiry*, 18, 139 [19](#)
- . 2012, *World Psychiatry*, 11, 11 [19](#)
- Mikulincer, M., Shaver, P. R., & Pereg, D. 2003, *Motivation and emotion*, 27, 77 [19](#)
- Mingarelli, C. M., Taylor, S. R., Sathyaprakash, B., & Farr, W. M. 2019, arXiv preprint arXiv:1911.09745 [9](#)
- Parida, A., Mitra, S., & Jhingan, S. 2016, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016, 024 [8](#)
- Raikes, H. A., & Thompson, R. A. 2005, *Infant Mental Health Journal: Official Publication of The World Association for Infant Mental Health*, 26, 177 [20](#)
- Romano, J. D., Cornish, N., et al. 2017, *Living reviews in relativity*, 20, 1 [8](#), [9](#)
- Ross, M. 2008, *Expansion of the universe-Standard Big Bang model*, Tech. rep. [1](#)

-
- Shaver, P., & Hazan, C. 1987, *Journal of Social Behavior and Personality*, 2, 105 [19](#)
- Shaver, P. R., & Mikulincer, M. 2002, *Attachment & human development*, 4, 133 [19](#)
- Sibley, C. G., Fischer, R., & Liu, J. H. 2005, *Personality and social psychology bulletin*, 31, 1524 [21](#)
- Smith, R., & Thrane, E. 2018, *Physical Review X*, 8, 021019 [8](#)
- Thurstone, L. L. 1947 [13](#)
- Tisseur, D., Vienne, C., Guérin, P., et al. 2016, in *19th World Conference on Non-Destructive Testing 2016* [26](#)
- Ungarelli, C., & Vecchio, A. 2004, *Classical and Quantum Gravity*, 21, S857 [8](#)
- Valavanis, S. 1959, *Econometrics: An introduction to maximum likelihood methods* (McGraw-Hill Book Company) [14](#)