

Università degli studi di Padova  
Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della  
Socializzazione  
Corso di Laurea Triennale in  
Scienze Psicologiche dello sviluppo, della personalità e delle  
relazioni interpersonali



RELAZIONE FINALE

**ANALISI FATTORIALE CONFERMATIVA DINAMICA: UN  
APPROCCIO BASATO SUGLI STATE-SPACE MODELS**

Relatore Prof. Antonio Calcagni  
Dipartimento di Scienze Psicologiche dello Sviluppo e della Socializzazione

Laureando Federico Berto  
Matricola N 1164365

Anno Accademico 2019/2020



*Vorrei dedicare questo lavoro ai miei genitori, sempre stati al mio fianco.*

*A mio fratello Daniele, compagno di vita.*

*A Gaia, per avermi sempre supportato e soprattutto sopportato.*

*Un ringraziamento speciale al mio caro relatore,  
il professor Antonio Calcagnì, guida fondamentale,  
sempre disponibile e paziente con il sottoscritto.*

*Senza di voi non sarei qui a ringraziarvi in questa bianca pagina.*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria</b>	<b>3</b>
2.1	Analisi Fattoriale Confermativa . . . . .	3
2.1.1	Modello CFA ad una sola variabile latente (Unidimensionale) . . . . .	4
2.1.2	Modello CFA a più variabili latenti (multidimensionale)	5
2.1.3	Struttura probabilistica della CFA . . . . .	7
2.2	Introduzione agli State Space Model (SSM) . . . . .	8
2.2.1	Tipologie di problemi negli State Space Models . . . . .	9
2.2.2	State Space Model di tipo lineare . . . . .	9
2.2.3	Bayesian filtering: Kalman Filter . . . . .	11
2.2.4	Prediction con il Kalman filter . . . . .	13
2.3	La CFA dinamica in termini di state space model . . . . .	14
2.4	Stima di massima verosimiglianza e filtro di Kalman . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Esempi applicativi</b>	<b>17</b>
3.1	Esempio di DFA con MARSS . . . . .	17
3.1.1	I dati . . . . .	17
3.1.2	Setting up del modello in Marss . . . . .	20
3.1.3	Adattamento del modello ai dati . . . . .	21
3.1.4	Determinare il numero di trend latenti . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Conclusione</b>	<b>25</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>27</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Obiettivo di questo elaborato è quello di illustrare come sia possibile trasformare la tecnica dell'analisi fattoriale confermativa (CFA) in analisi fattoriale confermativa dinamica (DFA) attraverso l'uso degli state space models (SSM). Gli state space models sono una classe di modelli statistici che descrivono la dipendenza probabilistica tra lo stato latente variabile e la misurazione osservata. Il termine "state space" fu coniato negli anni sessanta nel campo dell'ingegneria dell'automazione (Kalman,1960). Gli SSM forniscono un framework generale di lavoro per analizzare sistemi dinamici stocastici che vengono misurati o osservati attraverso un processo anch'esso stocastico. Gli SSM sono stati applicati con successo in ingegneria, statistica, informatica ed economia al fine di risolvere un'ampia gamma di problemi legati ai sistemi dinamici. Uno dei più noti algoritmi storicamente associati agli SSM è il c.d. *Kalman Filter* (o filtro di Kalman) che risulta essere stimatore ottimale per gli SSM lineari e gaussiani. L'elaborato sarà quindi così strutturato. Il capitolo 2 conterrà tutto quello che sarà l'impianto teorico del lavoro; si farà una breve introduzione alla tecnica dell'analisi fattoriale confermativa, spiegando il suo utilizzo nella pratica, qualche esempio grafico e la struttura probabilistica sottesa. Dopo la CFA si passerà agli SSM, anche qui sarà presente una breve introduzione seguita dalla spiegazione e struttura del modello, verrà poi spiegato il processo di filtering Bayesiano con il Kalman filter e in che modo sia possibile predire le osservazioni future con tale algoritmo. In seguito verrà riscritta la CFA in CFA dinamica (DFA) attraverso l'uso degli SSM e si

farà notare quanto questo processo sia semplice e immediato. La parte finale del capitolo 2 sarà dedicata alla stima dei parametri della DFA, attraverso il Kalman Filter verrà spiegato come sia possibile costruire la funzione di verosimiglianza del modello.

Nel capitolo 3 verrà usato il programma R assieme alla libreria MARSS per eseguire un'analisi fattoriale dinamica e mostrare così un'applicazione pratica della DFA. Si tiene a precisare che i dati dell'analisi sono reperiti direttamente dalla libreria MARSS in quanto, durante la progettazione dell'elaborato, sono stati riscontrati alcuni problemi nella ricerca di un dataset conveniente da analizzare.

Il capitolo 4 fornisce una breve conclusione all'elaborato con alcune note di sintesi.

# Capitolo 2

## Teoria

Nel capitolo 2 verranno presentati il metodo dell'Analisi Fattoriale Confermativa e gli state space models (SSM). In seguito si procederà alla scrittura della CFA in termini di State Space Models al fine di trasformare la CFA per dati statici in CFA dinamica, chiamata DFA.

### 2.1 Analisi Fattoriale Confermativa

L'analisi fattoriale confermativa è una tecnica utilizzata al fine di ridurre il numero  $p$  di componenti osservate (misurandi) mediante l'utilizzo di  $q$  variabili latenti (con  $q < p$ ). La CFA è un approccio ampiamente utilizzato nella pratica di ricerca psicometrica perché permette al ricercatore di definire e valutare la plausibilità empirica di modelli per la quantificazione di caratteristiche e attributi psicologici. La CFA utilizza come dato di partenza la matrice di correlazione della variabili osservate  $\mathbf{Cov}[\mathbf{X}] = \text{Cov}[X_1, \dots, X_j, \dots, X_p]$  che viene scomposta e analizzata per studiare quanta parte della variabilità osservata è riconducibile alle variabili latenti sottese dal modello.



### 2.1.1 Modello CFA ad una sola variabile latente (Unidimensionale)

Dato un insieme di variabili osservate ( $X_1, \dots, X_j, \dots, X_p$ ) il modello CFA è un insieme di equazioni lineari, tante quante sono le  $p$  variabili osservate:

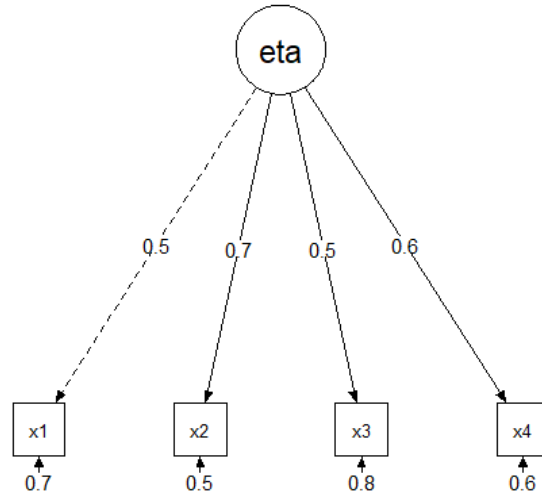
$$\begin{aligned} X_1 &= \eta\lambda_1 + \delta_1 \\ &\vdots \\ X_j &= \eta\lambda_j + \delta_j \\ &\vdots \\ X_p &= \eta\lambda_p + \delta_p \end{aligned}$$

Il termine  $\eta$  rappresenta la variabile latente (fattore) che sottende le osservate,  $X_1, \dots, X_p$  sono le variabili osservate,  $\delta_1, \dots, \delta_p$  indica la componente di errore della misurazione e  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  rappresentano i *factor loadings* del modello. La CFA presuppone che ogni variabile osservata dipenda da una variabile non osservata  $\eta$  e un coefficiente  $\lambda_j$  che quantifica il grado con cui la  $j$ -esima variabile osservata è legata alla  $q$ -esima variabile latente, a cui si aggiunge una componente d'errore residuale  $\delta_j$ .

Prendendo in considerazione la  $j$ -esima variabile, possiamo notare:

$$\begin{aligned} X_j &= \eta\lambda_j + \delta_j \\ &= c + u_j \end{aligned}$$

Dove  $c$  (parte comune) è costituito dalla componente  $\eta\lambda_j$ , e  $u_j$  (parte unica) è costituito dalla componente  $\delta_j$ . Il termine  $c$  rappresenta la componente del modello *in comune* con le  $p$  osservabili mentre  $u_j$  è la componente *unica* associata a ciascuna delle  $p$  osservabili.



**Figura 2.1:** Esempio di modello fattoriale unidimensionale. Si noti che l'unidimensionalità del modello è data dalla presenza di un unico *eta* (cerchio), che viene sotteso dalle 4 variabili osservate  $x_1, \dots, x_4$  (quadrati). I valori che si trovano tra *eta* e le variabili osservate sono i *factor loadings* che legano le variabili osservate all'*eta*, il numero posto sotto le osservate è la componente d'errore *delta* di ogni osservata.

### 2.1.2 Modello CFA a più variabili latenti (multidimensionale)

Il modello fattoriale confermativo unidimensionale è facilmente generalizzabile nel caso di  $q$  variabili latenti (sotto il vincolo che  $q < p$ ):

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \eta_1 \lambda_{11} + \dots + \eta_k \lambda_{k1} + \dots + \eta_q \lambda_{q1} + \delta_1 \\
 &\vdots \\
 X_j &= \eta_1 \lambda_{1j} + \dots + \eta_k \lambda_{kj} + \dots + \eta_q \lambda_{qj} + \delta_j \\
 &\vdots \\
 X_p &= \eta_1 \lambda_{1p} + \dots + \eta_k \lambda_{kp} + \dots + \eta_q \lambda_{qp} + \delta_p
 \end{aligned}$$

dove i misurandi del modello sono  $\eta_1, \dots, \eta_q$ . Il modello è detto multidimensionale perchè sono presenti più variabili latenti  $\eta$ . Il modello fattoriale confermativo con  $q$  variabili latenti può esser riscritto in forma compatta usando la notazione algebrica:

$$\mathbf{x}_{p \times 1} = \mathbf{\Lambda}_{p \times q} \boldsymbol{\eta}_{q \times 1} + \boldsymbol{\delta}_{p \times 1}$$

dove  $\mathbf{\Lambda}_{p \times q}$  è la matrice che contiene i coefficienti (*factor loadings*) che congiungono le variabili osservate (in riga) alle variabili latenti (in colonna).

Facciamo un esempio:

$$\mathbf{x}_{5 \times 1} = \mathbf{\Lambda}_{5 \times 2} \boldsymbol{\eta}_{2 \times 1} + \boldsymbol{\delta}_{5 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 \\ 0 & \lambda_{42} \\ 0 & \lambda_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{bmatrix}$$

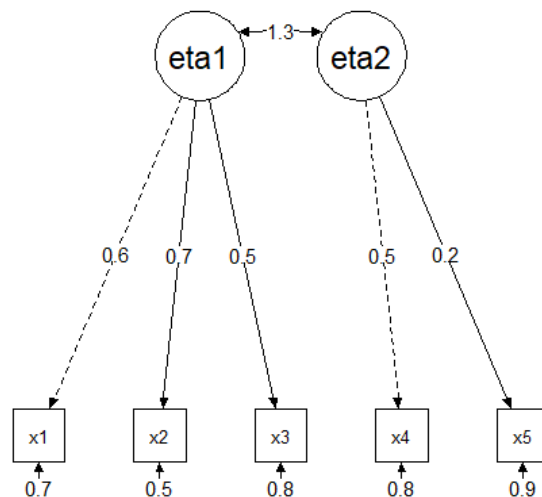
L'esempio è composto da  $p=5$  variabili osservate e  $q=2$  misurandi latenti. All'interno della matrice dei *factor loading* ( $\mathbf{\Lambda}$ ), il valore zero sta ad indicare che la variabile osservata non è legata con la latente in colonna (*parametro fissato*); al contrario, i valori diversi da zero stanno ad indicare la presenza di un legame con la variabile latente in colonna (*parametro libero*).

Il modello della figura 2.3 sarà quindi così parametrizzato:

$$\mathbf{x}_{p \times 1} = \mathbf{\Lambda}_{p \times q} \boldsymbol{\eta}_{q \times 1} + \boldsymbol{\delta}_{p \times 1}$$

$$\mathbf{x}_{5 \times 1} = \mathbf{\Lambda}_{5 \times 2} \boldsymbol{\eta}_{2 \times 1} + \boldsymbol{\delta}_{5 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \\ 0 & \lambda_{42} \\ 0 & \lambda_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{bmatrix}$$



**Figura 2.2:** Esempio di modello fattoriale multidimensionale. Il modello presenta due misurandi latenti ( $q=2$ ) e cinque variabili osservati ( $p=5$ ).

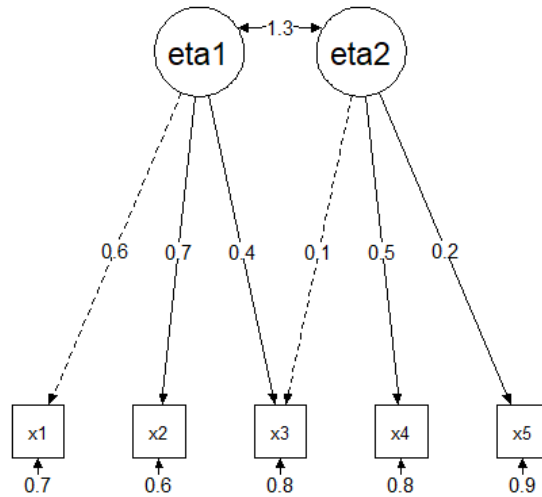
### 2.1.3 Struttura probabilistica della CFA

In questo paragrafo verranno esplicitate le densità di probabilità che regolano il comportamento del modello. A questo scopo consideriamo il vettore aleatorio  $\boldsymbol{\eta}_i$  di dimensione  $1 \times q$  ( $q$  numero di variabili latenti) per l' $i$ -esimo soggetto e il vettore aleatorio  $\mathbf{x}_i$  di dimensione  $1 \times p$  ( $p$  numero di variabili osservate). La struttura probabilistica congiunta dei due vettori può essere decomposta come segue:

$$F(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}) = F(\boldsymbol{\eta}_i; \boldsymbol{\theta})F(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\eta}_i; \boldsymbol{\theta})$$

Dove  $F(\boldsymbol{\eta}_i; \boldsymbol{\theta})$  è la densità di probabilità che governa il comportamento aleatorio di  $\boldsymbol{\eta}_i$  (l' $i$ -esimo vettore latente) e  $F(\mathbf{x}_i|\boldsymbol{\eta}_i; \boldsymbol{\theta})$  è la densità di probabilità condizionata che governa il comportamento del vettore aleatorio osservato  $\mathbf{x}_i$ . Se assumiamo che  $F(\cdot, \boldsymbol{\theta})$  appartenga alla famiglia delle densità di tipo gaussiano, avremo:

$$\boldsymbol{\eta}_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_i; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}_x)$$



**Figura 2.3:** Esempio di modello fattoriale multidimensionale. Il modello presenta due misurandi latenti ( $q=2$ ) e cinque variabili osservate ( $p=5$ ).

$$\mathbf{x}_i | \boldsymbol{\eta}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_i | \boldsymbol{\eta}_i; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_y)$$

Questa notazione in chiave probabilistica del modello sarà nuovamente utile quando andremo ad evidenziare le somiglianze della CFA con gli state space model che verranno introdotti nei prossimi paragrafi.

## 2.2 Introduzione agli State Space Model (SSM)

Dopo una breve esposizione della tecnica CFA verrà ora esposta una classe di modelli chiamata *state space models* (SSM). La loro caratteristica principale risiede nel fatto che i loro parametri sono in grado di adattarsi in funzione del tempo. In generale, gli *state space models* presentano un set di *stati* che mutano nel tempo e che vogliamo quantificare i quali sono legati a delle osservazioni soggette a rumore statistico. La presenza di tale rumore - che permea le nostre osservazioni - non permette di osservare direttamente le realizzazioni di tali stati latenti. L'obiettivo dell'analisi basata sugli SSM è

quello di ricavare informazione sugli *stati latenti*, tenendo in considerazione le osservazioni effettuate mediante l'utilizzo di una procedura ricorsiva. L'algoritmo più noto a tale scopo è il c.d. *Kalman filter* (KF) che verrà descritto nei paragrafi successivi.

### 2.2.1 Tipologie di problemi negli State Space Models

Nell'utilizzo degli SSM possiamo enucleare solitamente tre tipologie di problemi:

- *Predicition* - Prevedere i valori *futuri* dello stato latente
- *Filtering* - Stimare i valori *attuali* dello stato latente attraverso le osservazioni effettuate nel passato e nel presente
- *Smoothing* - Stimare i valori degli stati latenti a *ritroso* nel tempo

In generale, per cogliere la differenza tra i filtering e smoothing, possiamo notare come nello smoothing si vuole conoscere cosa è successo agli stati nel passato utilizzando le informazioni del presente mentre nel filtering si è interessati a comprendere cosa sta succedendo allo stato in un dato preciso momento.

### 2.2.2 State Space Model di tipo lineare

Procediamo con la discussione degli elementi che compongono il modello.

$$\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{G}_t \boldsymbol{\eta}_{t-1} + \mathbf{w}_t \quad (2.1)$$

Gli *stati* del sistema, poiché dipendenti dal *tempo*, verranno indicizzati con  $t$  e verrà dunque usato  $\boldsymbol{\eta}_t$  per rappresentare un vettore colonna  $p \times 1$  contenente gli stati. In uno state space model lineare possiamo dire che gli stati  $\boldsymbol{\eta}_t$  sono una combinazione lineare dello stato precedente ( $\boldsymbol{\eta}_{t-1}$ ) e del rumore del sistema (variazione casuale). Al fine di semplificare la trattazione del modello, considereremo il rumore proveniente da una distribuzione normale multivariata. La dipendenza lineare di  $\boldsymbol{\eta}_t$  dallo stato precedente  $\boldsymbol{\eta}_{t-1}$  (considereremo  $\boldsymbol{\eta}_{t-1}$  come un vettore colonna  $q \times 1$ ) è data dalla matrice  $\mathbf{G}_t$  di

dimensione  $p \times q$  anch'essa dipendere dal tempo. Il rumore tempo-dipendente è dato dal vettore colonna  $\mathbf{w}_t$  di dimensione  $p \times 1$ . L'equazione (2.1) prende il nome di *equazione dello stato*. Analogamente, abbiamo che le osservazioni sono definite come segue:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_t^T \boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{v}_t \quad (2.2)$$

Dove  $\mathbf{x}_t$  (vettore colonna  $p \times 1$ ) indica l'osservazione tempo-dipendente. Le osservazioni  $\mathbf{x}_t$  sono una combinazione lineare dello stato corrente  $\boldsymbol{\eta}_t$  (vettore colonna  $q \times 1$ ) e della variabilità casuale intrinseca del processo di misurazione  $\mathbf{v}_t$  (chiamato rumore di misurazione), proveniente anch'esso da una distribuzione normale multivariata.  $\mathbf{F}_t$  è la matrice  $p \times q$  di dipendenza lineare di  $\boldsymbol{\eta}_t$  su  $\mathbf{x}_t$ . L'equazione (2.2) prende il nome di *equazione dell'osservazione*.

Al fine di identificare il modello, si rende necessario specificare lo stato iniziale  $\boldsymbol{\eta}_0$ , assieme alle matrici di varianza-covarianza del rumore del sistema e del rumore di misurazione. Tali termini sono così definiti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_0 &\sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0) \\ \mathbf{v}_t &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{V}_t) \\ \mathbf{w}_t &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t) \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{0}$  è un vettore di zeri di ordine appropriato.

Riassumendo i termini del modello, abbiamo quanto segue:

- $\boldsymbol{\eta}_t$  - Il vettore colonna  $p \times 1$  contenente gli stati all'istante *t-esimo*
- $\mathbf{x}_t$  - Il vettore colonna  $p \times 1$  contenente le osservazioni all'istante *t-esimo*
- $\mathbf{G}_t$  - La *matrice transizione*  $p \times q$  degli stati correnti e precedenti all'istante  $t$  e  $t - 1$
- $\mathbf{F}_t$  - La *matrice*  $p \times q$  tra l'osservazione corrente e lo stato corrente all'istante  $t$
- $\mathbf{w}_t$  - Il *rumore del sistema*, proveniente da una distribuzione normale multivariata.

- $\mathbf{v}_t$  - Il *rumore della misurazione*, proveniente da una distribuzione normale multivariata.
- $\mathbf{m}_0$  - La *media* della distribuzione normale multivariata dello stato iniziale  $\boldsymbol{\eta}_0$
- $\mathbf{C}_0$  - La matrice varianza-covarianza per la distribuzione normale multivariata dello stato iniziale  $\boldsymbol{\eta}_0$
- $\mathbf{W}_t$  - La matrice varianza-covarianza della distribuzione normale multivariata dalla quale proviene il rumore del sistema
- $\mathbf{V}_t$  - La matrice varianza-covarianza della distribuzione normale multivariata dalla quale proviene il rumore della misurazione

Successivamente alla definizione del modello lineare, occorre definire una procedura ricorsiva che permetta di determinare gli stati  $\boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_t, \dots, \boldsymbol{\eta}_T$  date le osservazioni  $\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t, \dots, \mathbf{x}_T$  e gli stati iniziali del sistema. Tale procedura è il filtro di Kalman.

### 2.2.3 Bayesian filtering: Kalman Filter

Riscriviamo la nota *formula di Bayes*:

$$F(\boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{x}_t) = \frac{F(\mathbf{x}_t | \boldsymbol{\eta}_t) F(\boldsymbol{\eta}_t)}{F(\mathbf{x}_t)}$$

Dove  $\boldsymbol{\eta}_t$  si riferisce alle nostre *ipotesi* o *parametri* e  $\mathbf{x}_t$  si riferisce ai nostri *dati-osservazioni*. Il nostro obiettivo è quello di *aggiornare* la probabilità di osservare un determinato stato avendo a disposizione i dati raccolti precedentemente e l'osservazione corrente. Concettualizziamo meglio questo passaggio. Denotiamo per semplicità tutte le osservazioni precedenti mediante la matrice  $\mathbf{D}_t$  che racchiude la nostra conoscenza riguardo al sistema fino al tempo  $t$ . Applicando la formula di *Bayes* otteniamo:

$$F(\boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{D}_t, \mathbf{x}_t) = \frac{F(\mathbf{x}_t | \boldsymbol{\eta}_t) F(\boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{D}_{t-1})}{F(\mathbf{x}_t)}$$

dove la probabilità a posteriori (o aggiornata) di ottenere uno stato  $\boldsymbol{\eta}_t$ , attraverso la nostra osservazione corrente  $\mathbf{x}_t$  e i dati ottenuti precedentemente



$\mathbf{D}_t$ , è uguale alla verosimiglianza (*likelihood*) di osservare  $\mathbf{x}_t$  dato lo stato corrente  $\boldsymbol{\eta}_t$  moltiplicato per la nostra conoscenza a priori basata osservando i dati  $\mathbf{D}_t$  sullo stato corrente  $\boldsymbol{\eta}_t$ . La formula afferma che è possibile *aggiornare* in modo razionale la conoscenza sullo stato  $\boldsymbol{\eta}_t$  avendo nuove informazioni provenienti dall'osservazione corrente  $\mathbf{x}_t$ .

Applichiamo i concetti esposti fino a questo momento per derivare il Kalman filter. Iniziamo specificando la distribuzione a priori:

$$\boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{D}_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}_t, \mathbf{R}_t)$$

L'aspettativa a priori dello stato  $\boldsymbol{\eta}$  all'istante  $t$ , data la conoscenza dello stato all'istante  $t-1$ , è distribuita secondo una normale multivariata avente media  $\mathbf{a}_t$  e varianza-covarianza  $\mathbf{R}_t$ .

Ora consideriamo la distribuzione della *verosimiglianza*:

$$\mathbf{x}_t | \boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{F}_t^T \boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{V}_t)$$

La funzione di verosimiglianza dell'osservazione corrente  $x$  all'istante  $t$  è distribuita secondo una normale multivariata avente media  $\mathbf{F}_t^T \boldsymbol{\eta}_t$  e varianza-covarianza  $\mathbf{V}_t$ . Infine abbiamo la distribuzione a posteriori di  $\boldsymbol{\eta}_t$ :

$$\boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{D}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_t, \mathbf{C}_t)$$

La conoscenza a posteriori dello stato corrente  $\boldsymbol{\eta}$  all'istante  $t$ , data la conoscenza corrente all'istante  $t$  è distribuita secondo una normale multivariata avente media  $\mathbf{m}_t$  e varianza-covarianza  $\mathbf{C}_t$ . I parametri per il filtro di Kalman nel caso multivariato gaussiano sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \mathbf{G}_t \mathbf{m}_{t-1} \\ \mathbf{R}_t &= \mathbf{G}_t \mathbf{C}_{t-1} \mathbf{G}_t^T + \mathbf{W}_t \\ \mathbf{e}_t &= \mathbf{x}_t - \mathbf{f}_t \\ \mathbf{m}_t &= \mathbf{a}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{e}_t \\ \mathbf{f}_t &= \mathbf{F}_t^T \mathbf{a}_t \\ \mathbf{Q}_t &= \mathbf{F}_t^T \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t + \mathbf{V}_t \\ \mathbf{A}_t &= \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t \mathbf{Q}_t^{-1} \\ \mathbf{C}_t &= \mathbf{R}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{A}_t^T \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{f}_t$  è il valore previsto dall'osservazione all'istante  $t$ . Considerando che  $\mathbf{e}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{f}_t$ , si può notare come  $\mathbf{e}_t$  indichi l'errore associato alla previsione. La media a posteriori  $\mathbf{m}_t$  è data dalla ponderazione della media a priori e dell'errore di previsione, dal momento che  $\mathbf{m}_t = \mathbf{a}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{e}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{m}_{t-1} + \mathbf{A}_t \mathbf{e}_t$ , dove  $\mathbf{G}_t$  e  $\mathbf{A}_t$  sono le matrici di ponderazione (*weighting matrices*). Una volta introdotto il Kalman filter, in grado di aggiornare la nostra conoscenza degli stati e delle misurazioni, possiamo usare questo algoritmo per effettuare le diverse inferenze descritte nel paragrafo 2.2.1.

## 2.2.4 Prediction con il Kalman filter

L'approccio Bayesiano al Kalman filter ci garantisce la capacità di predire i valori che lo stato assumerà in futuro. Tenendo in considerazione che siamo in possesso del valore a posteriori dello stato  $\boldsymbol{\eta}_t$ , siamo in grado di predire i valori considerando il valore medio dell'osservazione.

Il valore previsto dell'osservazione di *domani*, avendo a disposizione i dati di *oggi*, è:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{D}_t] &= E[\mathbf{F}_{t+1}^T \boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{v}_{t+1} | \mathbf{D}_t] \\ &= \mathbf{F}_{t+1}^T E[\boldsymbol{\eta}_{t+1} | \mathbf{D}_t] \\ &= \mathbf{F}_{t+1}^T \mathbf{a}_{t+1} \\ &= \mathbf{f}_{t+1} \end{aligned}$$

Spieghiamo quanto scritto qui sopra. Dal momento che la funzione di verosimiglianza per le osservazioni di oggi  $\mathbf{x}_t$ , dato lo stato di oggi  $\boldsymbol{\eta}_t$ , è normalmente distribuita con media  $\mathbf{F}_t^T \boldsymbol{\eta}_t$  e varianza-covarianza  $\mathbf{V}_t$ , abbiamo che la previsione dell'osservazione di domani  $\mathbf{x}_{t+1}$ , derivante dai dati di oggi,  $\mathbf{D}_t$ , è data dalla previsione della distribuzione normale multivariata della verosimiglianza, chiamata  $E[\mathbf{F}_{t+1}^T \boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{v}_{t+1} | \mathbf{D}_t]$ . Una volta stabilita questa connessione, applicando le regole dell'operatore predittivo alle matrici e vettori rimanenti, arriviamo infine a  $\mathbf{f}_{t+1}$ . Dopo aver ottenuto  $E[\mathbf{F}_{t+1}^T \boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{v}_{t+1} | \mathbf{D}_t]$ ,

dobbiamo trovare la varianza delle osservazioni di domani dati i dati di oggi, altrimenti non potremo descrivere completamente la distribuzione dalla quale derivano le previsioni di domani.

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{D}_t] &= \text{Var}[\mathbf{F}_{t+1}^T \boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{v}_{t+1}|\mathbf{D}_t] \\
&= \mathbf{F}_{t+1}^T \text{Var}[\boldsymbol{\eta}_{t+1}|\mathbf{D}_t] \mathbf{F}_{t+1} + \mathbf{V}_{t+1} \\
&= \mathbf{F}_{t+1}^T \mathbf{R}_{t+1} \mathbf{F}_{t+1} + \mathbf{V}_{t+1} \\
&= \mathbf{Q}_{t+1}
\end{aligned}$$

Ora che abbiamo il valore atteso e la varianza delle osservazioni di domani, dati i dati di oggi, siamo in grado di fornire le previsioni generali per  $k$  istanze future, attraverso la descrizione della distribuzione:

$$\mathbf{x}_{t+k}|\mathbf{D}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{f}_{t+k|t}, \mathbf{Q}_{t+k|t})$$

Dove:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{t+k|t} &= \mathbf{F}_{t+k}^T \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{a}_{t+1} \\
\mathbf{Q}_{t+k|t} &= \mathbf{F}_{t+k}^T \mathbf{R}_{t+k} \mathbf{F}_{t+k} + \mathbf{V}_{t+k} \\
\mathbf{R}_{t+k|t} &= \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{R}_{t+1} (\mathbf{G}^{k-1})^T + \sum_{j=2}^k \mathbf{G}^{k-j} \mathbf{W}_{t+j} (\mathbf{G}^{k-j})^T
\end{aligned}$$

## 2.3 La CFA dinamica in termini di state space model

In questo paragrafo verrà illustrato come sia possibile trasformare la CFA statica in CFA dinamica rendendo i fattori latenti  $\boldsymbol{\eta}$  dipendenti dall'indice temporale  $t$ . In generale, si può notare l'equivalenza strutturale tra l'equazione della CFA dinamica e l'equazione dell'osservazione degli state space models.

Richiamiamo il modello lineare della CFA statica indicizzando questa volta i fattori latenti e gli errori in  $t$ :

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{v}_t$$

dove per semplicità si è fissata la generica osservazione  $i \in \{1, \dots, n\}$  mentre le dimensioni dei vettori sono quelle finora utilizzate. A questo livello è visibile

l'equivalenza strutturale tra la CFA dinamica e l'equazione delle osservazioni degli SSM. Per completare la scrittura del modello fattoriale dinamico, utilizziamo anche l'equazione degli stati latenti che permette di ottenere quanto segue:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_t &= \mathbf{I}\boldsymbol{\eta}_{t-1} + \mathbf{w}_t \\ \mathbf{x}_t &= \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{v}_t\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{I}$  è una matrice identità di ordine appropriato. In questa definizione, è possibile notare come la matrice dei coefficienti fattoriali  $\boldsymbol{\Lambda}$  sia costante nel tempo a differenza dei vettori latenti e degli errori del modello.

## 2.4 Stima di massima verosimiglianza e filtro di Kalman

Nelle applicazioni pratiche, le matrici del sistema  $\boldsymbol{\Lambda}$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  sono ignote e necessitano di essere stimate. Sfruttando la linearità del modello e le semplificazioni indotte dall'assumere leggi gaussiane per gli errori del modello, possiamo utilizzare un approccio basato sulla massima verosimiglianza. Denotando l'array complessivo dei parametri del modello come  $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ , la funzione di verosimiglianza associata per lo state space model dati i parametri  $\boldsymbol{\theta}$  è definita dalla densità congiunta  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T; \boldsymbol{\theta})$  che è fattorizzabile come segue:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T; \boldsymbol{\theta}) &= f(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x}_3|\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1; \boldsymbol{\theta}) \dots f(\mathbf{x}_T|\mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_1; \boldsymbol{\theta}) \\ &= f(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\theta}_0) \prod_{t=2}^T f(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

grazie alle proprietà Markoviane assunte per le densità di transizione del modello. In generale, quando il modello è lineare e di tipo gaussiano, la verosimiglianza è derivata come risultato del filtro di Kalman, notando che la densità marginali  $f(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\theta})$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) sono ancora di tipo normale. La densità di transizione delle osservazioni è di tipo normale:

$$\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}_{t|t-1}, \mathbf{C}_{t|t-1})$$

e nel caso  $t = 1$  si ha che  $\boldsymbol{\eta}_{t-1|t-1} = \boldsymbol{\eta}_{0|0}$  e  $\mathbf{C}_{t-1|t-1} = \mathbf{C}_{0|0}$  (stati iniziali del sistema). Quando  $t > 1$ , possiamo usare  $\boldsymbol{\eta}_{t-1|t-1}$  e  $\mathbf{C}_{t-1|t-1}$  assieme all'equazione di transizione per ottenere le seguenti medie e covarianze:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_{t|t-1} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\eta}_{t-1|t-1} \\ \mathbf{C}_{t|t-1} &= \mathbf{G}\mathbf{C}_{t-1|t-1}\mathbf{G}' + \mathbf{W}_t\end{aligned}$$

da cui, utilizzando  $\boldsymbol{\eta}_{t|t-1}$ , possiamo costruire la previsione

$$\mathbf{x}_{t|t-1} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}_{t|t-1}$$

e l'associato errore di previsione:

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|t-1} = \mathbf{x}_t - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}_{t|t-1} = \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\eta}_t - \boldsymbol{\eta}_{t|t-1})$$

Dal momento che gli errori sono di tipo gaussiano, segue che  $\mathbf{e}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V}_t + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}_{t|t-1}\boldsymbol{\Lambda}^T)$ . Inoltre  $\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_t + \mathbf{x}_{t|t-1}$ , segue che  $f(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{e}_t; \boldsymbol{\theta})$ . Infine, dato  $\boldsymbol{\eta}_{t-1|t-1}$  e  $\mathbf{C}_{t-1|t-1}$ , possiamo calcolare  $f(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$  mediante la funzione di densità normale:

$$f(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{V}_t + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}_{t|t-1}\boldsymbol{\Lambda}^T|}} \exp\left(-\frac{\mathbf{e}_t^T (\mathbf{V}_t + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}_{t|t-1}\boldsymbol{\Lambda}^T)^{-1} \mathbf{e}_t}{2}\right)$$

Il calcolo di  $\boldsymbol{\eta}_{t|t}$  e  $\mathbf{C}_{t|t}$  è fatto mediante le equazioni di correzione del filtro di Kalman:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_{t|t} &= \boldsymbol{\eta}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|t-1}) = \boldsymbol{\eta}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}_{t|t-1}) \\ \mathbf{C}_{t|t} &= \mathbf{C}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t(\mathbf{V}_t + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}_{t|t-1}\boldsymbol{\Lambda}^T)\mathbf{K}_t^T\end{aligned}$$

Dove:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{C}_{t|t-1}\boldsymbol{\Lambda}^T(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}_{t|t-1}\boldsymbol{\Lambda}^T + \mathbf{V}_t)^{-1}$$

da cui si evince come la predizione corretta sia una combinazione lineare tra la vecchia previsione,  $\boldsymbol{\eta}_{t|t-1}$ , e la predizione corrente dell'errore,  $(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|t-1})$ . Data la linearità,  $\mathbf{K}_t$  è scelto in modo da minimizzare la varianza dell'errore predetto.

Infine, calcolando le equazioni sopra delineate in modo ricorsivo (alternando previsione e correzione), è possibile ottenere i parametri (medie e covarianze) della CFA dinamica riscritta in termini di SSM.

# Capitolo 3

## Esempi applicativi

### 3.1 Esempio di DFA con MARSS

In questo capitolo useremo il pacchetto **MARSS** di R per eseguire un'analisi fattoriale dinamica (DFA), la quale ci permetterà di osservare la presenza di eventuali trend sottostanti ad un insieme relativamente ampio di serie temporali. Attraverso la DFA, cercheremo di spiegare la variazione temporale in un set di serie temporali osservate usando una combinazione lineare di un set di  $p$  trend nascosti.

#### 3.1.1 I dati

Il nostro obiettivo è quello di analizzare una parte di dati appartenenti al *Lake Washington plankton* dataset incluso nel pacchetto **MARSS**. Questo dataset include 33 anni di misurazioni mensili ( $T = 33$ ) riguardanti 13 specie di plankton ( $p = 13$ ) assieme a dati della temperatura dell'acqua, fosforo totale (TP), e pH.

Per iniziare, carichiamo i dati e procediamo con l'estrarre un subset di colonne corrispondenti alle sole specie di phytoplankton. Al fine di velocizzare il tempo di adattamento del modello ai dati e di limitare la nostra analisi agli anni senza dati mancanti, verranno esaminati 10 anni di dati (1980-1989), ottenendo dunque  $T = 10$ .

---

```
data(lakeWAp1ankton)
```

```
# ci occorre lakeWAp planktonTrans,  
il quale e' stato log-transformato  
# e gli zero sostituiti da NAs  
plankdat = lakeWAp planktonTrans  
years = plankdat[, "Year"] >= 1980 & plankdat[, "Year"] < 1990  
phytos = c("Cryptomonas", "Diatoms", "Greens",  
"Unicells", "Other.algae")  
dat.spp.1980 = plankdat[years, phytos]
```

Ora dobbiamo trasporre i dati e calcolare il numero delle time series e la loro lunghezza

```
# transponiamo i dati in modo  
che il tempo vada a posizionarsi  
sulle colonne  
dat.spp.1980 = t(dat.spp.1980)  
N.ts = nrow(dat.spp.1980)  
TT = ncol(dat.spp.1980)
```

MARSS ha una funzione utile per calcolare i punti z dei dati in modo rapido e semplice, i quali ci aiutano a comprendere quanto ogni punteggio si discosta dalla media di ogni serie temporale:

```
dat.z = zscore(dat.spp.1980)
```

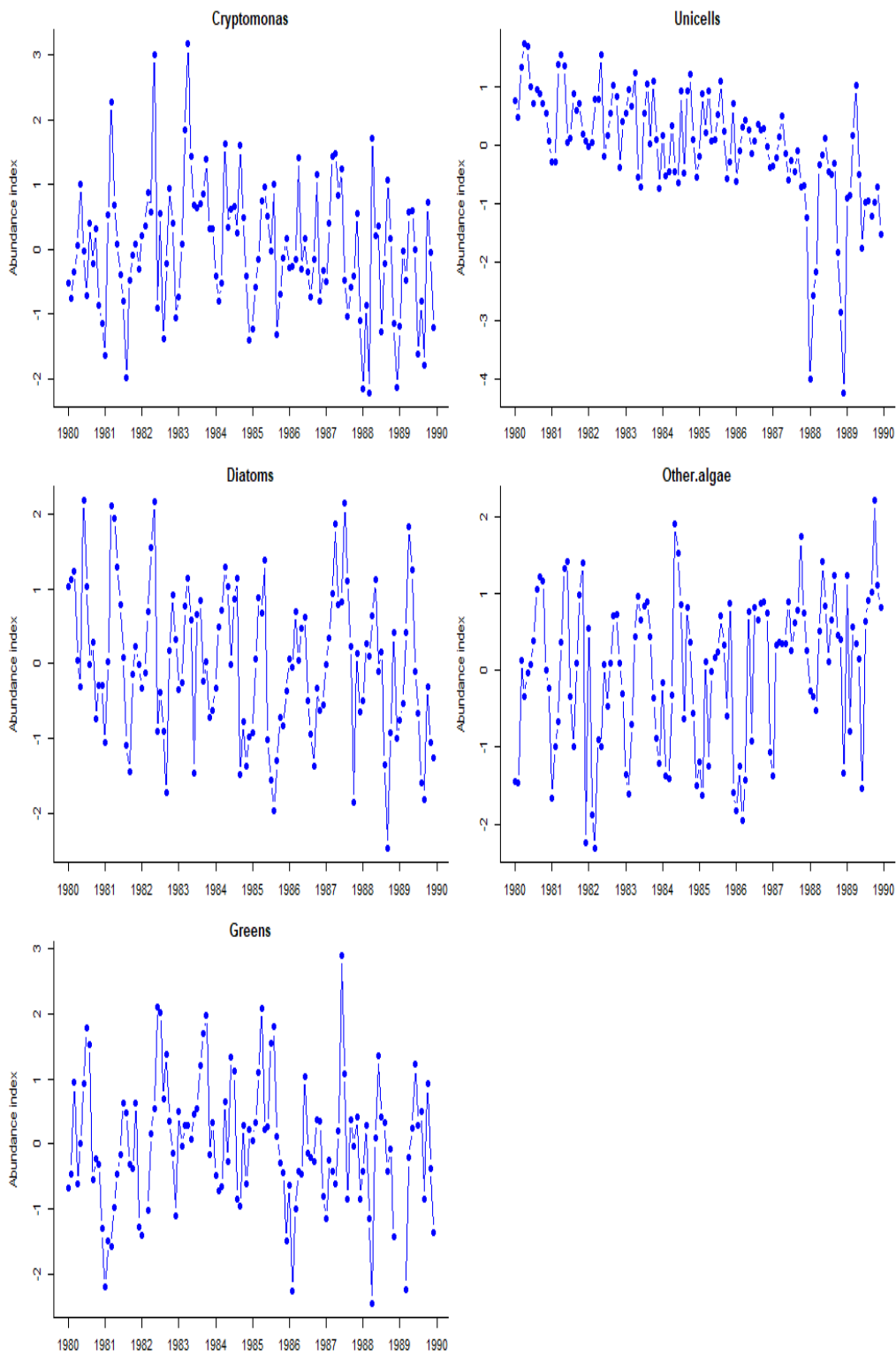


Figura 3.1: Serie temporali osservate del phytoplankton dopo il calcolo dei valori



### 3.1.2 Setting up del modello in Marss

Assumendo una modello con  $p = 5$  serie temporali e  $q = 3$  trend latenti, la matrice  $\mathbf{Z}$ , che in MARSS codifica la matrice  $\mathbf{\Lambda}$ , sarà la seguente:

```
Z.vals = list(
  "z11", 0 , 0 ,
  "z21","z22", 0 ,
  "z31","z32","z33",
  "z41","z42","z43",
  "z51","z52","z53")
Z = matrix(Z.vals, nrow=N.ts, ncol=3, byrow=TRUE)
```

La matrici  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{B}$ , che servono ad identificare in MARSS il modello DFA con il quale intendiamo lavorare, sono entrambe poste uguali alla matrice di identità attraverso:

```
Q = B = diag(1,3)
```

Per la nostra analisi, assumeremo che ogni time series dei phytoplankton abbia una differente varianza di osservazione, ma che non sia presente nessuna covarianza tra le time series. Quindi la matrice  $\mathbf{R}$  sarà costruita nel seguente modo:

```
R = "diagonal and unequal"
```

Il vettore contenente i parametri  $\boldsymbol{\pi}$  (chiamato  $x0$  in MARSS),  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{u}$  sono entrambi resi un vettore colonna di zero. Quindi:

```
x0 = U = A = "zero"
```

La matrice  $\mathbf{\Lambda}$  (chiamata  $v0$  in MARSS) è una matrice diagonale con i 5 lungo la diagonale:

```
v0 = diag(5,3)
```

Arrivati a questo punto, dobbiamo creare una lista contenente i parametri del modello da inserire nella funzione `MARSS()` e inoltre settare una lista di controllo:

```
dfa.model = list(Z=Z, A="zero", R=R, B=B, U=U,
```

```
Q=Q, x0=x0, V0=V0)
cntl.list = list(maxit=209)
```

### 3.1.3 Adattamento del modello ai dati

Ora che abbiamo la lista del modello DFA possiamo usare la funzione `MARSS()` per stimare la matrice  $\mathbf{Z}$  e gli stati nascosti ( $\mathbf{x}$ ).

```
kemz.3 = MARSS(dat.z, model=dfa.model, control=cntl.list)
```

```
Success! abstol and log-log tests passed at 209 iterations.
Alert: conv.test.slope.tol is 0.5.
Test with smaller values (<0.1) to ensure convergence.
```

MARSS fit is

Estimation method: kem

Convergence test: conv.test.slope.tol = 0.5, abstol = 0.001

Estimation converged in 209 iterations.

Log-likelihood: -777.0779

AIC: 1588.156 AICc: 1589.215

Estimate

Z.z11	0.5104
Z.z21	0.4912
Z.z31	0.2802
Z.z41	0.4280
Z.z51	0.2682
Z.z22	0.3984
Z.z32	-0.3265
Z.z42	-0.1079
Z.z52	-0.4037
Z.z33	0.0282
Z.z43	-0.1613
Z.z53	0.1768
R.(Cryptomonas,Cryptomonas)	0.5929
R.(Diatoms,Diatoms)	0.3493

```
R.(Greens, Greens)          0.7304
R.(Unicells, Unicells)     0.2967
R.(Other.algae, Other.algae) 0.4956
Initial states (x0) defined at t=0

Standard errors have not been calculated.
Use MARSSparamCIs to compute CIs and bias estimates.
```

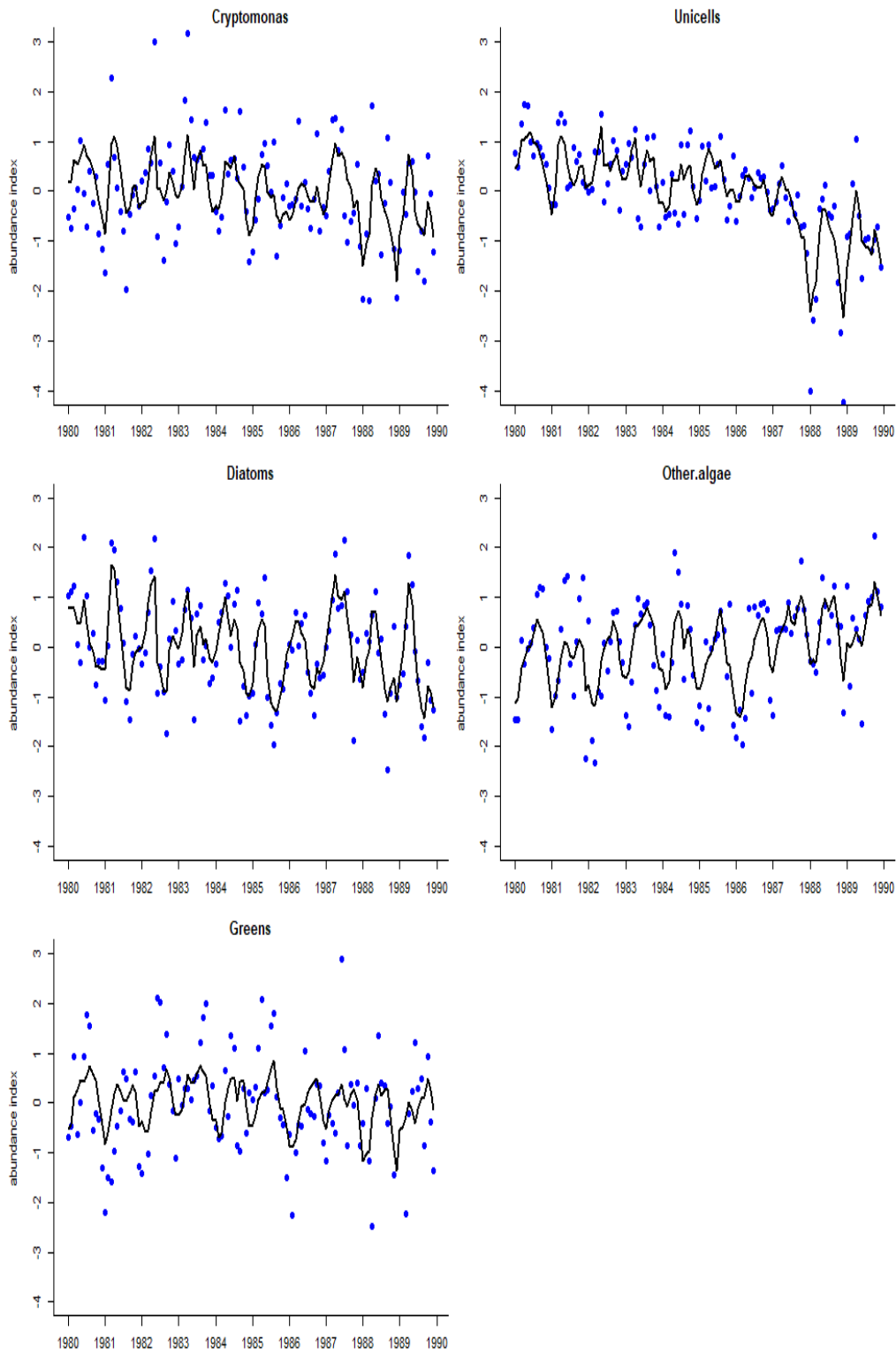
### 3.1.4 Determinare il numero di trend latenti

Per determinare il numero di trends sottostanti che hanno il maggior supporto dei dati utilizzeremo l'indice AICc per la selezione del modello migliore. Il nostro primo modello presentava 3 trends sottostanti ( $m=3$ ). Compareremo quindi il modello con 3 trends con un altro modello avente 2 trends. La struttura della matrice dei parametri  $\mathbf{R}$  e il vettore  $\mathbf{a}$  rimarranno invariati; gli altri vettori e matrici, invece, dovranno essere cambiati perché  $m$  sarà diverso.

```
model.list = list(m=2, R="diagonal and unequal")
kemz.2 = MARSS(dat.spp.1980, model=model.list,
  z.score=TRUE, form="dfa", control=cntl.list)
if(!saved.res) {
  model.list = list(m=2, R="diagonal and unequal")
  kemz.2 = MARSS(dat.spp.1980, model=model.list,
    z.score=TRUE, form="dfa", control=big.maxit.cntl.list)
}
```

Dopo aver settato il modello con 2 trends, andremo a comparare il suo indice AICc con quello del modello a 3 trends.

```
print(cbind(model=c("3 trends", "2 trends"),
  AICc=round(c(kemz.3$AICc, kemz.2$AICc))),
  quote=FALSE)
model AICc
[1,] 3 trends 1589
[2,] 2 trends 1608
```



**Figura 3.2:** Plots del Lake Washington phytoplankton con il fitting del modello (linee nere) avente 3 trends e matrice di covarianza diagonale e ineguale per gli errori delle osservazioni.

Dal confronto dell'indice AICc deriva che il modello avente 3 ha più supporto dai dati perchè il suo valore AICc è più di 10 unità inferiore di quello del modello a 2 trends (the lower the better).

# Capitolo 4

## Conclusione

In conclusione, dopo aver descritto la struttura della CFA e degli SSM, abbiamo illustrato come l'equazione delle osservazioni degli SSM è equivalente all'equazione della CFA, in quanto entrambe sottendono la medesima dipendenza lineare da un set di variabili latenti. Una volta aver stabilito questa connessione, recuperando anche l'equazione degli stati latenti degli SSM, abbiamo trasformato la CFA statica in dinamica (DFA). L'equazione degli stati latenti può essere vista come l'anello che congiunge la CFA statica con la CFA dinamica in quanto, come abbiamo visto, serve a porre lo stato latente all'istante  $t$  con se stesso all'istante precedente  $t-1$ . A questo punto la CFA può finalmente essere impiegata per quantificare quei costrutti latenti che variano nel tempo date le osservazioni effettuate in vari istanti temporali. Nel capitolo 3 è stata usata la libreria **MARSS** di R per eseguire una DFA sui dati del Lake Washington. Sono state quindi analizzate 10 anni di misurazioni di 5 specie di plankton. Dopo aver calcolato i punti  $Z$  è stato settato il modello DFA che spiegasse l'andamento delle 5 specie di plankton nel periodo 1980-1989. Infine il modello, ipotizzato a 3 trend latenti sottostanti, è stato comparato con lo stesso modello avente però 2 trend latenti sottostanti; dalla comparazione ne è risultato che il modello a 3 trend latenti si adatta meglio ai dati in quanto presenta indice di AICc inferiore di 19 unità inferiore rispetto al modello avente 2 trend.



# Bibliografia

- Held, Leonhard e D Sabanés Bové (2014). «Applied statistical inference». In: *Springer, Berlin Heidelberg*, doi 10.978-3, p. 16.
- Holmes, Elizabeth E, Eric J Ward e Kellie Wills (2012). «MARSS: Multivariate Autoregressive State-space Models for Analyzing Time-series Data.» In: *R journal* 4.1.
- Kunst, Robert (2007). «State space models and the Kalman filter». In: *Vektorautoregressive Methoden*.
- Pole, Andy, Mike West e Jeff Harrison (1994). *Applied Bayesian forecasting and time series analysis*. CRC press.
- Särkkä, Simo (2013). *Bayesian filtering and smoothing*. Vol. 3. Cambridge University Press.
- Wasserman, Larry (2013). *All of statistics: a concise course in statistical inference*. Springer Science & Business Media.
- Zhang, Zhiyong, Ellen L Hamaker e John R Nesselroade (2008). «Comparisons of four methods for estimating a dynamic factor model». In: *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal* 15.3, pp. 377–402.